

Intégration et probabilités

Contrôle continu 3

La question de cours et les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. On prendra soin de bien justifier les hypothèses des théorèmes utilisés.

Question de cours. (4 pts)

Rappeler et démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 1. (10 pts)

On appelle loi gamma de paramètre $p > 0$ et on note Γ_p la loi de densité

$$\gamma_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

où $\Gamma(p)$ assure que γ_p est une densité de probabilité.

1. Quelle est la loi Γ_1 ?
2. Montrer que $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ pour $p \geq 1$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On rappelle que si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densités respectives (par rapport à la mesure de Lebesgue) f et g alors $\mu * \nu$ est la mesure de densité

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes dont les lois admettent les densités respectives f et g alors la loi de $X + Y$ admet pour densité $f * g$.

4. Montrer que $\gamma_p * \gamma_q$ et γ_{p+q} sont proportionnelles.
5. En déduire que $\Gamma_p * \Gamma_q = \Gamma_{p+q}$ et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du$$

en fonction de $\Gamma(p)$, $\Gamma(q)$ et $\Gamma(p+q)$.

6. Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 2. (6 pts)

Soient X et Y deux variables aléatoires positives de carré intégrable définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. À quelle condition a-t-on $\mathbb{E}(X^2) = 0$? On exclut cette possibilité dans la suite.
2. En considérant la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}[(X + \lambda Y)^2]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

3. Montrer que

$$(1-\alpha)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[\alpha\mathbb{E}(X), +\infty[}(X)).$$

4. En déduire que

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha\mathbb{E}(X)) \geq (1-\alpha)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$