

Intégration et probabilités

Contrôle continu 2

La question de cours et les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. On prendra soin de bien justifier les hypothèses des théorèmes utilisés. Un barème indicatif est donné pour chaque exercice.

Question de cours. (4 pts)

Énoncer le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 1. (5 pts)

On pose, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}.$$

Calculer $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 2. (11 pts)

On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer la limite de F' en 0^+ .
3. Vérifier que pour tout $x > 0$

$$F(x) - F'(x) = \frac{I}{\sqrt{x}} \quad \text{où} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

4. En déduire que la fonction C définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $C(x) = e^{-x}F(x)$ vérifie la relation

$$C(x) = C(0) - I \int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = C(0) - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-v^2} dv.$$

5. Calculer $C(0)$ et $F(0)$. En conclure que

$$F(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right).$$

6. Retrouver à partir de ce qui précède la valeur de I .