

## Intégration et probabilités

### Contrôle continu 1

La question de cours et les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Un barème indicatif est donné pour chaque exercice.

**Fait admis.** On admettra qu'une mesure finie  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  est caractérisée par la fonction  $F_\mu$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

En d'autres termes, si  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures finies sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mu = \nu$  si et seulement si  $F_\mu = F_\nu$ .

**Question de cours.** (4 pts)

Donner la définition d'une mesure  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Démontrer que si  $\mu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$  alors, pour toute suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante de  $\mathcal{A}$ ,  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \lim_n \mu(B_n)$ .

**Exercice 1.** (11 pts) *Mesure image*

Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(F, \mathcal{B})$  un espace mesurable et  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$  une application mesurable. On définit l'application  $\mu_f$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  par

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

1. Montrer que  $\mu_f$  est une mesure sur  $(F, \mathcal{B})$ . Montrer de plus que si  $\mu$  est une mesure de probabilité, il en est de même pour  $\mu_f$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère des mesures sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Soit  $\eta$  la mesure associée à la fonction  $F_\eta = x \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$ . Elle est appelée mesure uniforme sur  $[0, 1]$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité telle que  $F_\mu$  soit continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que  $F_\mu$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans un ensemble que l'on précisera (on pourra calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x)$ ). On notera  $F_\mu^{-1}$  son inverse.
3. Calculer  $\eta(]-\infty, F_\mu(x)])$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
4. En déduire que la mesure image de  $\eta$  par  $F_\mu^{-1}$  est la mesure  $\mu$ .

Soit  $\nu$  la mesure de Bernoulli de paramètre  $1/2$  définie par  $\nu = (1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_1$ .

5. Déterminer  $F_\nu$ .
6. Montrer que  $\nu$  est la mesure image de  $\eta$  par une application  $f$  que l'on précisera. Y-a-t-il unicité de la fonction  $f$ ? Existe-t-il une application  $g$  telle que  $\eta$  soit l'image de  $\nu$  par  $g$ ?

**Exercice 2.** (5 pts)

Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$  une fonction mesurable et  $\mu$  une mesure sur  $\mathcal{A}$  telle que  $\mu(E) \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe un ensemble  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mu(A) \neq 0$  et  $f$  soit bornée sur  $A$ . On pourra considérer les ensembles  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définis par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \{f \leq n\}$ .
2. Montrer que si  $\mu(\{f > 0\}) \neq 0$  alors il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mu(A) \neq 0$  et  $f$  est minorée sur  $A$  par une constante strictement positive.