

Master de Mécanique
“Méthodes mathématiques”
Examen d’avril 2006
sans documents

Exercice 1 :

On considère le champ vectoriel

$$A(x, y, z) = (yz, zx, xy).$$

- a. Calculer son flux à travers la surface latérale du cylindre

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

- b. Calculer son flux à travers la surface totale de ce cylindre.

Exercice 2 :

- a. Une fonctionnelle $F(y, z)$ est définie par l’intégrale

$$F(y, z) = \int_a^b f(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)) dx.$$

Donner (avec justification) l’expression pour sa différentielle.

- b. Donner la condition nécessaire (dériver les équations d’Euler) pour que des fonctions $y(x)$, $z(x)$ réalisent son minimum.

- c. Supposons que f ne dépend pas explicitement de la variable y . Quelle loi de conservation en découle?

- d. Chercher l’extrémum $y(x)$, $z(x)$ de la fonctionnelle :

$$F(y, z) = \int_0^1 xy'(x)^2 z'(x) dx$$

sur l’ensemble des fonctions telles que

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 2.$$

Exercice 3 :

On considère un point matériel sur la surface d'un cône (voir le dessin). L'angle α est donné. On utilise les coordonnées sphériques avec le centre au sommet O du cône.

1. Ecrire la fonction de Lagrange en coordonnées r et φ .
2. Expliciter les équations d'Euler.
3. Quelles lois de conservation on peut en déduire?
4. Ecrire un système de 2 équations d'ordre 1 pour les fonctions $r(t)$ et $\varphi(t)$.
5. Ramener ce système à une seule équation pour $r(t)$.
6. Intégrer cette équation.
7. Trouver les valeurs maximales et minimales de $r(t)$ en fonction des données initiales (pour $t = 0$).

