

## Statistique paramétrique

### Examen du 12 mai – 2h, documents autorisés

---

**Exercice 1.** (*Un paramètre de la loi de Weibull*)

Soit  $(\gamma, \theta) \in ]0, \infty[^2$  et  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathbb{P}_{\gamma, \theta}$  sur  $\mathbb{R}_+$  de densité

$$f_{\gamma, \theta}(x) = \gamma \theta^2 x^{\gamma-1} \exp(-\theta^2 x^\gamma).$$

**a** – Donner une statistique exhaustive en  $(\gamma, \theta)$ . Est-elle minimale ?

Mêmes questions pour  $\theta$  seul ( $\gamma$  connu), et pour  $\gamma$  seul ( $\theta$  connu).

Dans la suite on suppose  $\gamma$  connu et on estime  $\theta$ . On pose

$$\varphi(\theta) = \int_{x>0} \gamma \theta^2 x^{2\gamma-1} \exp(-\theta^2 x^\gamma) dx.$$

**b** – Calculer l'information de Fisher sur  $\theta$  en fonction de  $\theta$  et  $\varphi(\theta)$ . Calculer  $\varphi(\theta)$ .

**c** – Calculer le contraste de Kullback. Retrouver le **b**.

**d** – Estimer  $\theta$  par maximum de vraisemblance. Préciser la convergence de l'e.m.v. obtenu.

**e** – Déterminer un intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau asymptotique  $1 - \alpha$ .

**f** – Soit  $F_{\gamma, \theta}$  la fonction de répartition de  $\sum_{i \leq n} X_i^\gamma$  sous  $\mathbb{P}_{\gamma, \theta}$ . Construire le test UPP au niveau  $\alpha$  de

$$H_0 : \theta \leq 2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta > 2.$$

Préciser sa fonction de puissance.

**Exercice 2.** (*Couple indépendant*)

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. indépendantes sur  $\mathbb{R}_+$  de densité respective

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \theta_1 \exp(-\theta_1 x) \\ f_Y(y) &= \theta_2 \exp(-\theta_2 y) \end{aligned}$$

où  $\theta_1 > 0$  et  $\theta_2 > 0$  sont deux paramètres inconnus.

On dispose d'un échantillon i.i.d.  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  de même loi que  $(X, Y)$ .

**a** – S'assurer que l'e.m.v. de  $(\theta_1, \theta_2)$  est exhaustif minimal.

**b** – Construire un cercle de confiance pour  $(\theta_1, \theta_2)$  au niveau asymptotique  $1 - \alpha$ .

**Rappel.** Une somme de  $n$  v.a. exponentielles indépendantes de paramètre  $\theta$  suit une loi gamma  $\gamma(n, \theta)$ . Au **c**, lorsque  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes de loi respective  $\gamma(n, \theta_1)$  et  $\gamma(n, \theta_2)$  noter  $G_{\theta_1}$  la fonction de répartition de  $Z_1$  et  $G_{\theta_1, \theta_2, a_1, a_2}$  celle de  $a_1 Z_1 + a_2 Z_2$ .

**c** – Déterminer dans les deux cas suivants le test UPP au niveau  $\alpha$ , en précisant sa puissance :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : (\theta_1, \theta_2) = (1, 1) \\ H_1 : (\theta_1, \theta_2) = (2, 1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_0 : (\theta_1, \theta_2) = (1, 1) \\ H_1 : (\theta_1, \theta_2) = (2, 2) \end{array} \right.$$

**d** – Proposer un test de  $H_0 : (\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$  contre  $H_1 : \theta_1 > 1, \theta_2 > 1$  sans l'étudier.

**e** – Proposer un test de  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  contre  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$  sans l'étudier.

**Exercice 3.** (*Vecteur gaussien corrélé*)

Soit  $\mathbb{P}_\theta^{X,Y}$  la loi d'un vecteur gaussien d'espérance  $\theta$  inconnue et de matrice de covariance  $V$  connue,

$$\theta = \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad |\rho| < 1.$$

On estime  $\theta$  à l'aide d'un échantillon  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  i.i.d. de loi  $\mathbb{P}_\theta^{X,Y}$ . On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

**Rappel.** La densité d'une loi gaussienne  $\mathcal{N}(m, V)$  sur  $\mathbb{R}^d$  avec  $V$  symétrique positive régulière est

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det V}} \exp \left( -\frac{1}{2} (z - m)^t V^{-1} (z - m) \right).$$

**a** – Montrer que le modèle est exponentiel canonique de statistique privilégiée

$$\left( \frac{S_n - \rho T_n}{(1 - \rho^2)}, \frac{T_n - \rho S_n}{(1 - \rho^2)} \right).$$

**b** – Calculer la matrice d'information de Fisher en  $\theta$ .

**c** – Justifier que la statistique  $(S_n, T_n)$  est exhaustive minimale complète.

**d** – Montrer que l'e.m.v. de  $\theta$  est unique et optimal. Est-il efficace ?

**e** – On estime  $g(\theta) = (m_X - m_Y)^r$  où  $r > 0$ . De la convergence en loi de l'e.m.v. déduire que

$$\sqrt{n} \frac{(S_n/n - T_n/n)^r - g(\theta)}{r\sqrt{2 - 2\rho}(m_X - m_Y)^{r-1}} \xrightarrow{Loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

**f** – Construire une région de confiance pour  $g(\theta)$  au niveau asymptotique  $1 - \alpha$ .

**g** – Si  $m_Y$  est connu, déterminer l'unique estimateur sans biais efficace de  $m_X$  basé sur les  $(X_i, Y_i)$ .

Que vaut le rapport d'efficacité de  $S_n/n$  dans ce cas ?

**h** – Si  $m_Y$  est connu, donner un intervalle de confiance pour  $m_X$  au niveau asymptotique  $1 - \alpha$ .

Le comparer à celui construit à l'aide de  $X_1, \dots, X_n$  seuls.