

**Examen Mai 2006 durée : 2 heures**

**Exercice A (les questions 4 et 5 sont faisables à partir du résultat de la question 3.)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de la loi uniforme sur l'intervalle  $A = [a, b]$  ( $a < b$ ). On rappelle que la densité de cette loi vaut  $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_A(x)$ , sa fonction de répartition  $F(x) = (x-a)/(b-a)$  pour  $x \in A$ .

1. On admet que le couple  $(X_{(1)}, X_{(n)}) = (\min_{1 \leq i \leq n} X_i, \max_{1 \leq i \leq n} X_i)$  possède une densité  $g$  (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - (a) Pour  $a \leq s \leq t \leq b$ , interpréter l'événement  $(X_{(1)} > s, X_{(n)} \leq t)$  et calculer sa probabilité notée  $\pi$ .
  - (b) Exprimer cette probabilité en fonction de  $g$ .
  - (c) En déduire l'expression suivante de  $g$

$$g(s, t) = \frac{n(n-1)(t-s)^{n-2}}{(b-a)^n} \mathbb{I}_\Delta(s, t), \quad \text{où } \Delta = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq t \leq b\}.$$

2. À l'aide du changement de variable  $u = \frac{1}{2}(s+t)$ ,  $v = \frac{1}{2}(t-s)$ , déterminer la densité du couple

$$(U_n, V_n) = (\frac{1}{2}[X_{(1)} + X_{(n)}], \frac{1}{2}[X_{(n)} - X_{(1)}]).$$

3. On pose  $\xi_n = \frac{2}{(b-a)} V_n$ . Montrer que  $\xi_n$  a la densité :  $h(u) = n(n-1)u^{n-2}(1-u) \mathbb{I}_{[0,1]}(u)$ .
4. On rappelle que pour des entiers positifs ou nuls  $k$  et  $\ell$ ,  $\int_0^1 x^k (1-x)^\ell dx = \frac{k! \ell!}{(k+\ell+1)!}$ .  
Établir la formule

$$\mathbb{E}[(\xi_n - 1)^2] = \frac{6}{(n+1)(n+2)}.$$

5. En déduire que quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $X_{(n)} - X_{(1)}$  converge en moyenne quadratique ( $L^2$ ) vers  $(b-a)$ .  
Est-il possible que  $\sqrt{n}[(X_{(n)} - X_{(1)}) - (b-a)]$  converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance  $\delta^2 > 0$  ?

**Exercice B.** On considère un entier  $n \geq 3$  et  $E = \{-1, +1\}^n$ , l'espace fini des vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dont les coordonnées valent  $+1$  ou  $-1$ . Soit deux réels  $a, b$  avec  $b \neq 0$ , une loi de Gibbs sur  $E$  :

$$\pi(x) = \frac{1}{Z} e^{-H(x)}, \quad H(x) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}, \quad Z = \sum_{y \in E} e^{-H(y)}.$$

On considère, pour l'échantillonneur de Metropolis de simulation de la loi  $\pi$ , le noyau de proposition  $Q(x, y)$  suivante : si  $x$  désigne l'état courant, la proposition  $y$  est définie comme suit

- Choisir deux indices  $i \neq j$  au hasard parmi  $\{1, \dots, n\}$  ;
- Echanger les valeurs de  $x_i$  et  $x_j$  :  $y_j = x_i$ ,  $y_i = x_j$ ,  $y_k = x_k$  si  $k \notin \{i, j\}$ .

1. Déterminer précisément le noyau  $Q$  : on précisera en particulier les états  $y$  auxquels mène un état  $x \in E$  et les probabilités de transition associées.

**T.S.V.P./**

---

2. La noyau  $Q$  est-il symétrique ? irréductible ?

3. On fixe un état (de référence)  $c = (c_i) \in E$  et on note  $s = c_1 + \dots + c_n$ . Soit  $E_0 = \{x \in E : x_1 + \dots + x_n = s\}$ , un sous-espace de  $E$ . On considère la loi  $\pi_0$  définie sur  $E_0$  :

$$\pi_0(x) = \frac{1}{Z_0} e^{-H(x)}, \quad Z_0 = \sum_{y \in E_0} e^{-H(y)}, \quad x \in E_0$$

- (a) Montrer que  $Q_0$ , la restriction de  $Q$  sur  $E_0$  est un noyau de Markov (matrice de transition) bien défini ; qu'il est irréductible et symétrique.
- (b) Décrire l'échantillonneur de Metropolis associé au noyau  $Q_0$  pour la simulation de la loi  $\pi_0$ .
- (c) Calculer  $\Delta = H(y) - H(x)$  si  $x$  mène à  $y$ .
- (d) Cet échantillonneur converge-t-il en loi ?

**Exercice C.** Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\theta > 0$  et on note  $(N_t)_{t \geq 0}$  son processus de comptage. Soit  $t > 0$ .

1. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , justifier la formule : pour toute fonction borélienne bornée  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}[\psi(T_1, \dots, T_k) | N_t = k] = \int \dots \int_{0 < x_1 < \dots < x_k < t} \frac{k!}{t^k} \psi(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

En déduire que pour toute fonction borélienne bornée  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}[\phi(T_k) | N_t = k] = \int_0^t \frac{k}{t} \left(\frac{x}{t}\right)^{k-1} \phi(x) dx.$$

2. On considère la variable aléatoire

$$D_t = \begin{cases} t - T_{N_t}, & \text{si } N_t \geq 1, \\ t, & \text{si } N_t = 0. \end{cases}$$

Autrement dit,  $D_t$  mesure le temps écoulé entre la dernière arrivée avant  $t$  et l'instant  $t$  (si arrivée il y a).

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne bornée.

- (a) Quel est le domaine des valeurs de  $D_t$  ?
- (b) Déterminer  $\mathbb{E}[g(D_t) \mathbf{1}_{\{N_t=0\}} | N_t]$ .
- (c) Établir la formule

$$\mathbb{E}[g(D_t) \mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} | N_t] = \mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \int_0^t \frac{N_t}{t} \left(\frac{t-u}{t}\right)^{N_t-1} g(u) du.$$

- (d) Déduire de ce qui précède la valeur de  $\mathbb{E}[g(D_t)]$ .
- (e) Quelle est la loi de  $D_t$  ?
- (f) Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $D_t$  converge-t-elle en loi ?