

Université de Rennes 1, Master de Mathématiques, H07, Fonctions spéciales
Examen final, mardi 9 mai 2006, 14:00 – 16:00

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.

- 1.1. Rappeler la définition du logarithme complexe. Sous quelle condition sur z a-t-on $\text{Log}(z^2) = 2\text{Log} z$?
- 1.2. Donner la définition de la fonction ζ de Riemann. Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle. Quel est ce pôle et quel est le résidu de ζ en ce pôle? *La démonstration n'est pas demandée.*
- 1.3. Qu'est-ce que la formule d'Euler, liant la fonction ζ et les nombres premiers? *La démonstration n'est pas demandée.*
- 1.4. Donner la définition de la fonction Γ . Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Quels sont ses pôles et ses résidus en ces pôles? Quelle est l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Γ ? Calculer $\Gamma(-1/2)$.
- 1.5. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x, y) = e^{-(x^2 + xy + y^2)}$. Quelle est la transformée de Fourier de f ?
- 1.6. On rappelle l'expression de la fonction de Bessel de première espèce

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1 + k)}.$$

Montrer que pour $z \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{iz \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\theta}$.

Exercice 2. Soient $(\rho, \epsilon, R) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[$ et soit $C_{\rho, \epsilon, R}$ le contour orienté du plan complexe composé du segment $[\rho e^{i\epsilon} + R, \rho e^{i\epsilon}]$, de la portion de cercle de $\rho e^{i\epsilon}$ à $\rho e^{-i\epsilon}$ passant par $-\rho$ et du segment $[\rho e^{-i\epsilon}, \rho e^{-i\epsilon} + R]$.

- 2.1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, on pose $L(z) = \text{Log}(-z) + i\pi$. Montrer que L est une détermination du logarithme qui correspond à une détermination de l'argument dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{C}$, $z^t = e^{tL(z)}$. Calculer $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ \text{Im } z > 0}} z^t$ et $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ \text{Im } z < 0}} z^t$.
- 2.2. Montrer que $\oint_{C_{\rho, \epsilon, R}} z^{s-1} (e^z - 1)^{-1} dz$ a un sens.
- 2.3. Pour $\rho \in]0, 2\pi[, s \in \mathbb{C}$, montrer que $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0_+ \\ R \rightarrow +\infty}} \oint_{C_{\rho, \epsilon, R}} z^{s-1} (e^z - 1)^{-1} dz$ existe. On note $F(\rho, s)$ cette limite. Donner une expression intégrale de F .
- 2.4. Montrer que, pour $\rho \in]0, 2\pi[, F(\rho, s)$ ne dépend pas de ρ .
- 2.5. Montrer que pour $\rho \in]0, 2\pi[, la fonction $s \mapsto F(\rho, s)$ est entière.$
- 2.6. Montrer que pour $\text{Re } s > 1, \rho \in]0, 2\pi[, F(\rho, s) = \alpha(s) \int_0^{+\infty} e^{(s-1) \ln x} (e^x - 1)^{-1} dx$ avec une fonction α que l'on explicitera.