
Examen du 09/05/2006, 2 heures.

Le barème donné à titre indicatif est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 : Questions de cours (4,5 pts) Donnez une réponse concise.

a) 0,5pt Donner la formule de Leibnitz pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\partial^\alpha(fg) = \dots$$

b) 0,5pt Compléter la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (b-a)^\alpha + \dots$$

c) 0,5pt Donner la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

d) 1pt Que peut-on dire de l'ordre d'une distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ à support compact ? Est-ce encore vrai pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$?

e) 1 pt Quand dit-on que deux fermés F et G de $\mathbb{R}^d$ sont convolutifs ? et que deux distributions $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sont convoluables ?

f) 0,5pt Qu'est-ce qu'une solution élémentaire E pour l'opérateur différentiel à coefficients constants $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$?

g) 0,5pt Si $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ que vaut $\mathcal{F}(u * v)$ en fonction de $\mathcal{F}(u)$ et $\mathcal{F}(v)$?

Exercice 2 (6pts) On note Δ le Laplacien dans $\mathbb{R}^2$ et on rappelle les expressions

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2, \quad \Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2$$

en coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et en coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$. On note la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $\Phi(x) = \log(r)$, $r = |x|$.

a) 1pt Vérifier $\Delta\Phi(x) = 0$ pour $x \neq 0$.

b) 2pts Vérifier que $\Phi \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$.

c) 3pts Montrer qu'il existe une constante c à préciser telle que $E = c\Phi$ est une solution élémentaire de Δ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (10 pts) Comme dans l'exercice précédent on travaille avec le Laplacien dans $\mathbb{R}^2$.

a) 3pts Montrer qu'une distribution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ à son support inclus dans $\{0\}$ si et seulement si c'est une combinaison linéaire de dérivées de δ_0 .

b) 2pts En utilisant la transformée de Fourier, montrer que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ vérifie $\Delta u = 0$ si et seulement si c'est un polynôme harmonique (ie polynôme vérifiant $\Delta P = 0$ sur $\mathbb{R}^2$).

c) 1pt Donner un exemple de polynôme harmonique de degré 2 dans $\mathbb{R}^2$.

d) 2pts Donner la structure générale d'une solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ de $\Delta u = f$ avec $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.

e) 2pts Dans la question précédente on prend $f = \sum_{i=1}^N q_i \delta_{x_i}$, montrer que l'on peut donner une CNS sur $\sum_{i=1}^N q_i$ pour que l'équation $\Delta u = f$ admette une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.