

EXAMEN

Barème indicatif : exercice 1 : 6, exercice 2 : 6, exercice 3 : 8.

Exercice 1

- 1) Modifiez l'algorithme de Gauss qui calcule le déterminant d'une matrice carrée pour déterminer son rang.
- 2) Donnez la complexité de cet algorithme en fonction de la dimension n et du rang r .

Exercice 2

- 1) On considère l'idéal I de $\mathbf{Q}[X, Y]$ engendré par les deux polynômes

$$XY - 1, \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 \quad \text{où } ab \neq 0.$$

Calculez une base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique où $X > Y$. Montrez que le système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} XY - 1 = 0 \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

a au plus quatre solutions dans $\mathbf{C}^2$.

- 2) Discutez en fonction de a et b le nombre de solutions du système d'équations (1) dans $\mathbf{C}^2$ et dans $\mathbf{R}^2$.
- 3) Interprétation géométrique.

Exercice 3

- 1) Soient $N_0 = 4$, $N_1 = 0$, $N_2 = 12c^2$, $N_3 = -24c^3$, $N_4 = 84c^4$. Déterminer le polynôme unitaire P de degré quatre dont ce sont les sommes de Newton.
- 2) Calculer N_5 et N_6 .
- 3) Déterminer le rang et la signature de la forme de Hermite de P .
- 4) Calculer le nombre de racines complexes et réelles de P en fonction de c .
- 5) Montrer que si $c \neq 0$, P a une racine triple que l'on déterminera.