

Examen terminal

Vendredi 6 janvier 2006 - durée : 2 heures

*Tous documents autorisés.
L'épreuve se compose de deux exercices indépendants.*

Exercice 1.

On se donne un domaine Ω borné et Lipschitzien, de frontière $\partial\Omega$. Comme dans le cours, on note $n(x)$ la normale unitaire extérieure à la frontière et $d\sigma$ la mesure sur $\partial\Omega$ induite par la mesure de Lebesgue. On suppose que $\partial\Omega$ est constituée de deux parties Γ_D et Γ_N telles que

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset, \quad \int_{\Gamma_D} d\sigma > 0.$$

On définit l'espace

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

(la dernière propriété étant entendue au sens des traces).

1. En raisonnant par l'absurde, démontrer que l'on a sur V la propriété de Poincaré suivante :

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall u \in V, \quad \|u\|_{L^2} \leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2}.$$

2. En déduire que le problème suivant admet une unique solution :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

3. Quelle EDP cette solution u vérifie-t-elle dans Ω au sens des distributions?
4. On suppose avoir pu montrer que la solution u de (1) appartenait à $H^2(\Omega)$. Démontrer que pour toute fonction $v \in V$ on a

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = 0.$$

5. En déduire le problème aux limites (EDP + conditions aux limites) que vérifie la solution u de (1) au sens faible.

Exercice 2.

Sur l'intervalle $]0,1[$, on considère l'espace suivant :

$$W = \{u \in L^2(0,1) : \sqrt{x} u' \in L^2(0,1)\},$$

où u' désigne la dérivée de u au sens de $\mathcal{D}'(]0,1[)$, muni de la norme

$$\|u\|_W = \left(\int_0^1 (x |u'(x)|^2 + |u(x)|^2) dx \right)^{1/2}.$$

On désigne par W_0 l'adhérence de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans W , et l'on note

$$|u|_W = \left(\int_0^1 x |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que W et W_0 sont des espaces de Hilbert (indication : on vérifiera que si v_n est une suite convergeant vers v au sens des distributions, alors $\sqrt{x}v'_n$ converge vers $\sqrt{x}v'$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$).
2. Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$, on a les inégalités suivantes :

$$\forall x \in]0,1[, \quad |v(x)| \leq |\log x|^{1/2} |v|_W \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^2(0,1)} \leq |v|_W.$$

Indication : on pourra partir de la relation $v(x) = - \int_x^1 v'(t) dt$.

3. Dédurre de la question précédente que, sur W_0 , $\|\cdot\|_W$ et $|\cdot|_W$ sont deux normes équivalentes et que $1 \notin W_0$.
4. On pose $g(x) = \log \frac{x}{e}$; pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $g^\alpha \in W$?
5. Montrer que l'application $v \mapsto g^{-1/2}v$ est continue de $(W_0, |\cdot|_W)$ dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty(0,1)})$. En déduire que $W_0 \subset C^0([0,1])$ et que $W_0 \subset \{v \in W ; v(1) = 0\}$.
6. Soit $w \in W$ donné ; montrer que le problème

$$(2) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in W_0, \text{ tel que } \forall v \in W_0, \\ \int_0^1 x u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 x w'(x) v'(x) dx, \end{cases}$$

admet une solution et une seule.

7. Quelles sont, dans W , les solutions θ de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\theta}{dx} \right) = 0 \quad \text{au sens des distributions sur } (0,1) ?$$

En déduire, en interprétant le problème (2), que $u(x) = w(x) - w(1)$.

8. En déduire les relations suivantes :

$$W = W_0 \oplus \mathbb{P}_0, \quad W \subset C^0([0,1]), \quad W_0 = \{v \in W : v(1) = 0\}, \quad W_0 \not\subset C^0([0,1])$$

(où $\mathbb{P}_0$ désigne l'espace des fonctions constantes sur $[0,1]$). Montrer que W est l'adhérence de $\mathcal{D}([0,1])$ vis-à-vis de la norme $\|\cdot\|_W$.