

Examen du 5 janvier 2005. Durée 2 heures.

NI DOCUMENT NI CALCULETTE AUTORISÉ.

On précisera bien à chaque fois les théorèmes utilisés. On rappelle que $C^1([a, b])$ est l'ensemble des fonctions continuellement dérivables sur $]a, b[$ et dont la dérivée admet une limite finie en a et en b .

EXERCICE 1

Soit f continue sur $\mathbb{T}$, de classe $C^1([0, 1])$, telle que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f dt = 0$

1. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'est pas $C^1(\mathbb{T})$.
2. On note $c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt} dt$ le n -ième coefficient de Fourier de f . Justifier l'existence de $c_n(f')$ et l'exprimer en fonction de $c_n(f)$ (on démontrera).
3. En déduire l'inégalité

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt \geq 4\pi^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt.$$

4. Étendre l'inégalité précédente aux fonctions périodiques de période a et de classe $C^1([0, a])$.

EXERCICE 2 Soit $T, a \in \mathbb{R}$. On considère la mesure définie par $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT+a}$, où δ_x désigne la masse de Dirac au point x .

1. Montrer que μ est une mesure non bornée, mais tempérée.
2. Montrer la formule de Poisson, pour $f \in \mathcal{S}$:

$$\sum_k f(t + kT) = T^{-1} \sum_n \hat{f}(n/T) e^{2\pi i n t / T}.$$

Indication : On s'intéressera à la fonction périodique $u(t) = \sum_k f(tT + kT)$.

3. En déduire la transformée de Fourier de μ .
4. À un signal sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, identifié à un signal périodique $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on associe la mesure $\lambda = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n u_n$. Calculer la transformée de Fourier de λ .

EXERCICE 3 Étant donné une suite $h = (h_k, k \in \mathbb{Z})$, on note F_h le filtre associé, défini par

$$F_h : (x_n) \rightarrow (y_n), \quad \text{où } y_n = \sum_k h_{n-k} x_k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

et $\hat{h}$ son spectre : $\hat{h}(u) = \sum_k h_k e^{-2i\pi k u}$. Étant donné un filtre F_h stable ($\sum_n |h_n| < \infty$), on cherche un filtre F_g qui inverse F_h , c'est-à-dire un filtre tel que le filtre composé $x \rightarrow F_g(F_h(x))$ soit l'identité.

1. Démontrer que si F_g et F_h sont stables alors le filtre composé est de la forme F_k pour une certaine suite (k_n) à préciser et que F_k est stable.
2. Exprimer le spectre du F_k de la question précédente à l'aide de $\hat{h}(u)$ et $\hat{g}(u)$ (on démontrera).

3. À quelle condition sur k F_k est-t-il l'identité ?
4. Proposer des conditions sur la fonction $\hat{h}(u)$ qui assurent l'existence d'un filtre inverse F_g stable.

EXERCICE 4 Soit $(x_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le signal dont la mesure spectrale a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction $\hat{x}(u) = (1 - |u|)_+$. On rappelle que $x_t = \sin(\pi t)^2 / (\pi t)^2$.

1. Rappeler l'expression d'un signal z_t en fonction de sa mesure spectrale $\mu_z(du)$.
2. Quel signal y_t a pour mesure spectrale la mesure dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est la fonction $(1 - |u - 1|)_+ + (1 - |u + 1|)_+$?
3. Quel signal y_t a pour mesure spectrale la mesure dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est la fonction $(1 - |u - 1|)_+ - (1 - |u + 1|)_+$?