

G04. Théorie de Galois

Épreuve du 19 octobre 2005.

Durée : 4 heures. Sans documents.

Les quatre exercices sont indépendants. Voici un barème probable : **5 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5** .

1. - Question de cours.

Démontrer l'un, au choix, des résultats suivants :

- 1) Les polynômes cyclotomiques $\Phi_n(X)$ sont irréductibles dans $\mathbf{Q}[X]$.
- 2) Soient G un groupe fini d'automorphismes d'un corps L , et $K = L^G$ le sous-corps des invariants. Alors $\dim_K(L) \leq \text{Card}(G)$.

2. - Soient $K \subset L$ une extension finie de corps, σ un K -automorphisme de L et x un élément non nul de L . On suppose que le degré de L sur K est *impair*, et que $x\sigma(x) \in K$. Montrer que x est dans K (On montrera que $\sigma(K(x)) \subset K(x)$, et que σ restreint à $K(x)$ est d'ordre au plus 2, puis on considèrera les degrés des extensions $K \subset K(x)^\sigma \subset K(x) \subset L$).

3. - Le polynôme $X^4 - X^2 + 1$ est-il cyclotomique ? Déterminer un générateur de l'extension de $\mathbf{Q}$ de décomposition de ce polynôme à l'aide des racines 3-ème et 4-ème de l'unité j et i (on rappelle que l'extension de décomposition d'un polynôme est une extension qui contient - et est engendrée par - les racines du polynôme).

Mêmes questions pour le polynôme $X^4 + X^2 + 1$.

4. - Soit $\omega \in \mathbf{C}$ une racine primitive 5-ème de l'unité. On pose $L = \mathbf{Q}(\omega)$ et $G = \text{Gal}(L/\mathbf{Q})$.

4.1. Rappeler la définition de l'isomorphisme $\iota : G \longrightarrow (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^\times$. Montrer que G contient un unique sous-groupe H d'ordre 2.

4.2. On pose $\alpha = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\omega)$ et $\beta = \sum_{\sigma \in G, \sigma \notin H} \sigma(\omega)$. Donner le polynôme minimal de ω , et calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.

4.3. Dédurre de 4.2 que $\mathbf{Q}(\omega)^H = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

5. - Soient a et b des entiers non nuls tels que ni a , ni b ni ab ne soit un carré dans $\mathbf{Q}$. On désigne par $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ des nombres complexes de carré égal à, respectivement a et b . On pose $u = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, et $K = \mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

5.1. Quel est le degré de K sur $\mathbf{Q}$?

5.2. Après avoir calculé u^3 , exprimer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ comme des polynômes en u à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Montrer que $K = \mathbf{Q}(u)$.

5.3. Quel est le polynôme minimal $P(X) \in \mathbf{Q}[X]$ de u ? Exprimer les racines de P en fonction de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.

5.4. Déterminer le groupe de Galois $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$.

5.5. Factoriser $P(X)$ dans $\mathbf{Q}(\sqrt{ab})[X]$.