

04 Janvier 2006

GROUPES CLASSIQUES (G03)- MASTER1
Examen final

Durée: 120 minutes; documents non permis- Barème indicatif

NB: Il n'est pas nécessaire d'avoir répondu à l'ensemble des questions pour obtenir la note maximale. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1 (8P)

I. Cours

- (i) Parmi les groupes suivants, lesquels sont des groupes simples : $GL_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ (discuter suivant les valeurs de l'entier n) ?
- (ii) Qu'appelle-t-on "homographie de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ " ? On donnera une définition précise de cette notion.
- (iii) Donner un système de générateurs pour le groupe $SL_n(\mathbb{C})$.

II. Questions

Pour les 5 affirmations suivantes, répondre par vrai ou faux en justifiant succinctement chacune de vos réponses.

- (i) Deux groupes abéliens de même cardinal sont isomorphes.
- (ii) Le groupe alterné $\mathfrak{A}_8$ contient un sous-groupe à 64 éléments.
- (iii) La droite projective $\mathbb{P}^1(K)$, où K est le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, contient 8 éléments.
- (iv) Il n'existe pas d'homomorphisme surjectif de $SO(6)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.
- (v)(*) Soit K un corps. Le groupe $GL_4(K)$ agit transitivement sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de K^4 de dimension 2.

Exercice 2 (5P) Soient K un corps commutatif, $n \geq 1$ un entier et X un ensemble non vide. Soit $\varphi : GL_n(K) \rightarrow X$ une application telle que

$$\varphi(ABC) = \varphi(BAC) \quad \forall A, B, C \in GL_n(K).$$

On suppose que $(n, K) \neq (2, \mathbb{F}_2)$. On se propose de montrer qu'il existe une application $\psi : K^* \rightarrow X$ telle que $\varphi(A) = \psi(\det(A))$ pour tout $A \in GL_n(K)$.

- (i) Montrer que $\varphi([X, Y]A) = \varphi(A)$ pour tous $X, Y, A \in GL_n(K)$, où $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$.
- (ii) Montrer que $\varphi(XA) = \varphi(A)$ pour tous $A \in GL_n(K)$ et $X \in SL_n(K)$.
- (iii) Conclure.

(iv)(*) Montrer que le résultat (iii) est faux si $(n, K) = (2, \mathbb{F}_2)$, en considérant une application convenable $\varphi : GL_2(\mathbb{F}_2) \rightarrow \{\pm 1\}$.

Exercice 3 (5P) Soit $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ le corps des quaternions, muni de la structure euclidienne pour laquelle $\{1, i, j, k\}$ est une base orthonormée et $G = SU(2) = \{q \in \mathbb{H} / \|q\| = 1\}$ le groupe des quaternions de norme 1. Soit $P \subset \mathbb{H}$ le sous-espace des quaternions purs. Soit $q_0 \in G \setminus \{\pm 1\}$ fixé pour le reste de l'exercice. Soit $S_{q_0} \in SO(3)$ définie par $S_{q_0}(q) = q_0 q \bar{q}_0$ pour tout $q \in P$. On se propose de déterminer l'axe et l'angle de rotation de S_{q_0} .

On écrit $q_0 = a1 + p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $p \in P$. Soit $\theta \in [0, \pi]$ défini par $\cos \theta = a$ et $\sin \theta = \|p\|$.

- (i) Montrer que $\mathbb{R}p$ est l'axe de rotation de S_{q_0} .
- (ii) Montrer qu'il existe $q_1 \in G$ tel que $S_{q_1}(p) = \|p\|i$.
- (iii) Soit $q'_0 = a1 + \|p\|i$. Montrer que l'angle de rotation de S_{q_0} coïncide avec celui de $S_{q'_0}$.
- (iv) Calculer $S_{q'_0}(j)$ ainsi que $\langle S_{q'_0}(j) | j \rangle$.
- (v) En déduire que l'angle de rotation de S_{q_0} est 2θ .

Exercice 4 (5P) I. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini k .

- (i) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont toutes des racines k -ièmes de l'unité.
- (ii) On suppose que $\text{Trace}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$.

II. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe. On suppose que G est un *groupe d'exposant fini*, c-à-d qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $A^m = I_n$ pour tout $A \in G$. On se propose de montrer que G est fini.

- (i) Montrer que $\{\text{Trace}(A) / A \in G\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

Soit E le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par G et soit $\{X_1, \dots, X_r\}$ une base de E formée d'éléments de G . On considère l'application

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^r, \quad A \mapsto (\text{Trace}(AX_1), \dots, \text{Trace}(AX_r)).$$

- (ii) Montrer que φ est injective.
- (iii) Montrer que G est fini.