

Examen - 2 heures

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice non plus.

Il sera tenu compte de la clarté des arguments et de la qualité de la rédaction dans l'évaluation des copies.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (8 pts). Les trois premières questions de cet exercice sont des questions de cours : il faut (re)donner une démonstration de chaque point.

Soit $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2 < +\infty$. On définit pour tous $x, y \in l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$

$$(x | y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \overline{y_i} .$$

- a) Montrer que $(l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}), (\cdot | \cdot))$ est un espace préhilbertien.
- b) Montrer que c'est un espace de Hilbert.
- c) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $e^{(n)}$ de $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ par

$$e_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la famille $(e^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$.

Pour tout $x \in l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$, on pose $(Ax)_0 = 0$ et

$$(Ax)_i = \frac{1}{i} x_{i-1} \quad \text{si } i \in \mathbb{N}^* .$$

- d) Montrer que A est un opérateur linéaire continu de $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ dans lui-même. Donner sa norme.
- e) Montrer que A n'a pas de valeur propre.
- f) Montrer que A est compact. Donner son spectre.

Exercice 2 (Matrice et déterminant de Gram - 6 pts). Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel. Pour $p \geq 1$, on associe à tout p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ la matrice $p \times p$ de terme général $g_{i,j} = (x_i | x_j)$. On l'appelle **matrice de Gram** de $(x_1, \dots, x_p)$, et on la note $G(x_1, \dots, x_p) = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$. Le déterminant de cette matrice est appelé **déterminant de Gram** de $(x_1, \dots, x_p)$.

a) Vérifier qu'une matrice de Gram est symétrique.

b) Pour $p = 2$, montrer que

$$\det(G(x_1, x_2)) \geq 0$$

pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$.

À quelle condition a-t-on $\det(G(x_1, x_2)) = 0$?

c) Pour tout $p \geq 1$, et $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, exprimer le réel $(a | G(x_1, \dots, x_p) | a)$ en fonction de la norme d'une combinaison linéaire des vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$. En déduire que

$$\det(G(x_1, \dots, x_p)) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée.

(Variante : Vous pourrez préférer conclure en vous ramenant à une base ortho-normée de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.)

d) Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre dans E et F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \dots, x_p))}{\det(G(x_1, \dots, x_p))}. \quad (1)$$

Exercice 3 (Théorème de Müntz - 6 pts). On travaillera désormais dans l'espace de Hilbert $E = L^2([0; 1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Pour tout réel r positif, on note h_r la fonction de E définie par $h_r(x) = x^r$.

a) Redonner le raisonnement permettant d'affirmer que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille totale de E .

On fixe une suite strictement croissante $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels positifs (ou nuls). Pour tout $k \geq 0$, soit H_k le sous-espace vectoriel de E engendré par $(h_{r_0}, \dots, h_{r_k})$.

b) Montrer que la famille $(h_{r_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est totale dans E si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(h_n, H_k) = 0.$$

c) On veut utiliser la formule (1) de l'Exercice 2 pour obtenir une condition explicite sur la suite $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ assurant que la famille $(h_{r_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est totale.

- i. Soit $a_1, \dots, a_p$ des réels strictement positifs et A_p la matrice $p \times p$ de terme général $a_{i,j} = \frac{1}{a_i + a_j}$. Montrer que

$$\Delta_p = \det(A_p) = \frac{1}{2^p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{a_j} \prod_{1 \leq k < l \leq p} \left(\frac{a_k - a_l}{a_k + a_l} \right)^2.$$

(*Indication* : On pourra raisonner par récurrence, en montrant que le déterminant $\Delta_p(X)$ de la matrice $p \times p$ de terme général $\tilde{a}_{i,j} = \frac{1}{a_i + a_j}$ si $j < p$ et $\tilde{a}_{i,p} = \frac{1}{a_i + X}$ peut s'écrire sous la forme $\Delta_p(X) = C \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i - X)}{\prod_{i=1}^p (a_i + X)}$, puis exprimer C en fonction de Δ_{p-1} .)

- ii. Démontrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$

$$d(h_n, H_k)^2 = \frac{1}{2n+1} \prod_{j=0}^k \left(\frac{n - r_j}{n + r_j + 1} \right)^2.$$

- iii. En déduire que la famille $(h_{r_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est totale dans E si et seulement si

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{r_i} = +\infty.$$