

Examen final

Durée : 2 heures

Il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements dans l'appréciation des copies !

Documents, calculatrices, téléphones portables, etc... sont interdits.

Les résultats démontrés en TD doivent être redémontrés si vous en avez besoin.

Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1

Choisissez un résultat de la première partie du cours (c'est-à-dire avant le début de la partie sur les séries de Fourier) et énoncez-le *correctement*. Le correcteur ne jugera pas le choix du résultat, mais la façon dont il est énoncé (on attend bien sûr un résultat juste, mais aussi et surtout bien rédigé).

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables f pour lesquelles l'ensemble

$$\mathcal{M}(f) = \{M \geq 0, \quad \mu(\{|f| > M\}) = 0\}$$

est non vide, et qu'on pose alors $\|f\|_\infty = \inf \mathcal{M}(f)$. Par ailleurs si f est une fonction bornée sur X , on posera

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

1. On suppose f mesurable et bornée sur X . Montrez que f est dans $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$ et qu'on a $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{\sup}$.
2. On suppose ici que $X = \mathbf{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. En considérant la fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$, montrez que l'inégalité du 1. peut être stricte.
3. On suppose ici et dans la question suivante que $X = [a, b]$ où $a < b$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Montrez que si f est une fonction continue sur X , alors $\|f\|_\infty = \|f\|_{\sup}$.
4. (*Question facultative*) Pourquoi le sous-espace de l'espace vectoriel normé $(\mathbf{L}^\infty([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ constitué des fonctions continues est-il fermé ?

Exercice 3

On rappelle que $\mathbf{T}$ désigne l'espace quotient $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Le but principal de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$. On suppose que les coefficients de Fourier de f sont réels et vérifient les conditions

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \widehat{f}(|n|) \geq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad \widehat{f}(n) = -\widehat{f}(-n). \quad (0.1)$$

Alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\widehat{f}(n)}{n}$ est convergente.

Comme dans le cours on note $\tilde{f}$ la fonction 2π -périodique sur $\mathbf{R}$ associée à f .

1. Montrez que l'application $F : x \mapsto \int_0^x \tilde{f}(u) du$ est bien définie, continue, 2π -périodique et qu'on a

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad i n \widehat{F}(n) = \widehat{f}(n).$$

2. Que peut-on dire de la convergence de la moyenne de Cesaro de la série de Fourier de F en 0 (on citera précisément le résultat du cours utilisé) ?

3. Montrez que pour $n \geq 1$, on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^n \frac{\widehat{f}(k)}{k} = \frac{1}{2} \left(i \sigma_n(F, 0) - i \widehat{F}(0) \right) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \widehat{f}(k)$$

4. En déduire le résultat cherché.

5. Soit $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ la suite double impaire (i.e. vérifiant la condition (0.1)) définie par $c_0 = c_1 = 0$ et $c_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$. Montrez qu'il n'existe pas d'élément f de $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ tel que $\widehat{f}(n) = c_n$ pour tout n .

6. Cette question est totalement indépendante des précédentes. Soit $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ définie par $c_n = \frac{1}{|n|+1}$. Existe-t-il un élément f de $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ tel que $\widehat{f}(n) = c_n$ pour tout n ? Existe-t-il un élément f de $\mathbf{L}^2(\mathbf{T})$ ayant cette propriété ? Existe-t-il une fonction f de classe C^1 sur $\mathbf{T}$ ayant cette propriété ?