

Université de Rennes 1, L3 – F01. Ordinary Differential Equations
 Final Exam, Saturday, May 13, 10:30 – 12:30, Hall 2nd cycle

Exercise 1. Solve the initial value problem $y' = -xy + x$, $y(0) = 0$.

Exercise 2. We consider the ODE $y' = y(y^2 - 1)$. Show that there are only three constant solutions. Sketch the integral curves of the solutions. Discuss on the value of $\alpha = y(0)$ whether the maximal solutions are global or not.

Exercise 3. Find all the solutions of $y'' - 3y' + 2y = e^{ax}$ where a is a real parameter.

Exercise 4. We consider the ODE $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$. Show that 0 is a regular singular point. What is the associated Euler equation? What is the indicial equation? Find two independent solutions of this equation on $\mathbb{R}_+^*$.

Exercise 5. Let $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^1 odd function such that $q(x) > 0$ for $x > 0$. We define $V(x) = \int_0^x q(r)dr$ and we assume that $V(1) = 1/2$. We consider the second-order ODE

$$(\sharp) \quad \ddot{x} + q(x) = 0.$$

5.1. Show that the function V is even, bijective from $[0, 1]$ onto $[0, 1/2]$. Show that for each $\alpha \in]0, 1/2]$ there exists a unique $x_\alpha \in]0, 1]$ such that $V(x_\alpha) = \alpha = V(-x_\alpha)$. Let $\alpha \in]0, 1/2]$ be given. Show that the set

$$C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 + 2V(x) = 2\alpha\}$$

is a C^1 curve, symmetric with respect to the x -axis and to the y -axis.

5.2. Write $(\sharp)$ as a first-order 2×2 system and show that $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ is a first integral of the motion.

5.3. Let α be given in $]0, 1/2]$ and let us consider the solution such that $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \sqrt{2\alpha}$. Calculate $\dot{x}^2 + 2V(x)$. Show that $\dot{x}$ is bounded as well as x . Prove that the solution is defined for all times.

5.4. We define $G(x) = \int_0^x (2\alpha - 2V(r))^{-1/2} dr$. Show that this function is well defined for $x \in [0, x_\alpha]$. We define $T_\alpha = 4G(x_\alpha)$.

5.5. Show that there exists θ_α such that $\dot{x}(\theta_\alpha) = 0$. Prove that this equation is satisfied for $\theta_\alpha = T_\alpha/4$.

5.6. Prove that the motion is periodic and find an integral expression for the period.

Answers to this exam will be available at the URL <http://perso.univ-rennes1.fr/nicolas.lerner/syllabus.ode.html>

Version française au verso

Université de Rennes 1, L3 – F01. Equations différentielles ordinaires

Examen final, Samedi 13 mai 10:30 – 12:30, Hall 2nd cycle

Exercice 1. Résoudre $y' = -xy + x$, $y(0) = 0$.

Exercice 2. On considère l'EDO $y' = y(y^2 - 1)$. Montrer qu'il y a seulement trois solutions constantes. Dessiner approximativement les courbes intégrales. Discuter sur les valeurs de $\alpha = y(0)$ la globalité des solutions maximales.

Exercice 3. Trouver toutes les solutions de $y'' - 3y' + 2y = e^{ax}$ où a est un paramètre réel.

Exercice 4. On considère l'EDO $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$. Montrer que 0 est un point singulier régulier. Quelle est l'équation d'Euler associée ? Quelle est l'équation indicelle ? Trouver deux solutions indépendantes de cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5. Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 impaire telle que $q(x) > 0$ pour $x > 0$. On définit $V(x) = \int_0^x q(r)dr$ et l'on suppose que $V(1) = 1/2$. On considère l'EDO du second ordre

$$(\sharp) \quad \ddot{x} + q(x) = 0.$$

5.1. Montrer que V est paire, bijective de $[0, 1]$ sur $[0, 1/2]$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1/2]$, il existe un unique $x_\alpha \in]0, 1]$ tel que $V(x_\alpha) = \alpha = V(-x_\alpha)$. Soit $\alpha \in]0, 1/2]$. Montrer que l'ensemble

$$C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 + 2V(x) = 2\alpha\}$$

est une courbe C^1 , symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées.

5.2. Ecrire $(\sharp)$ comme un système 2×2 du premier ordre et montrer que $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ est une intégrale première du mouvement.

5.3. Soit $\alpha \in]0, 1/2]$ et considérons la solution telle que $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \sqrt{2\alpha}$. Calculer $\dot{x}^2 + 2V(x)$. Montrer que $\dot{x}$ est borné ainsi que x . Démontrer que la solution est définie globalement.

5.4. On pose $G(x) = \int_0^x (2\alpha - 2V(r))^{-1/2} dr$. Montrer que cette fonction est bien définie pour $x \in [0, x_\alpha]$. On pose $T_\alpha = 4G(x_\alpha)$.

5.5. Montrer qu'il existe θ_α tel que $\dot{x}(\theta_\alpha) = 0$. Montrer que cette équation est satisfaite pour $\theta_\alpha = T_\alpha/4$.

5.6. Montrer que le mouvement est périodique et donner une expression intégrale pour la période.

Un corrigé sera disponible sur <http://perso.univ-rennes1.fr/nicolas.lerner/syllabus.ode.html>

English version on the back