

Examen Terminal
Mercredi 10 Mai 2006
Durée : 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés.

Exercice 1

Répondre aux questions suivantes par VRAI ou FAUX, *sans justifier la réponse.*

- A. Soit (E, d) un espace métrique.
- 1) Si O est un ouvert non vide de E et $x \in E \setminus O$, alors $d(x, O) > 0$.
 - 2) Si (E, d) est complet, et si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante ($F_{n+1} \subset F_n, n \in \mathbb{N}$) de fermés non vides, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
- B. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.
- 1) Si Ω est un ouvert de E , et si Ω est connexe, Ω est connexe par arcs.
 - 2) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, F est fermé dans E .
 - 3) Si F est un hyperplan de E (i.e. le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E), F est fermé dans E .
 - 4) Si E est complet, la boule unité fermée de E est compacte.

Exercice 2

Répondre aux questions suivantes par VRAI ou FAUX, *en justifiant la réponse.*

- I. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$; on note $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.
- 1) Si A et B sont compactes, $A + B$ est compacte.
 - 2) Si A est ouvert, $A + c$ est ouvert pour tout $c \in \mathbb{R}^n$.
 - 3) Si A est ouvert, $A + B$ est ouvert.
- II. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leq n$.
- 1) L'application $P \mapsto N(P) = \sum_{k=0}^n |P(k)| : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme équivalente à la norme $P \mapsto \|P\|_{\infty, [0, 1]} = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$.
 - 2) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X] : |P(-1)| \leq C \cdot N(P)$.

Exercice 3

Soient K un espace topologique compact et $C^0(K; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs réelles muni de la norme $f \mapsto \|f\|_{\infty, K} = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

- 1) Soit I un idéal de l'anneau $C^0(K; \mathbb{R})$, i.e. un sous-anneau de $C^0(K; \mathbb{R})$ tel que pour tous $f \in I$ et $g \in C^0(K; \mathbb{R})$, $g \cdot f \in I$.
Montrer que si la fonction constante $\mathbf{1} : x \mapsto 1 : K \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à I , alors $I = C^0(K; \mathbb{R})$.
- 2) Soit $x \in K$. On pose : $J(x) = \{f \in C^0(K; \mathbb{R}); f(x) = 0\}$.
 - a) Montrer que $J(x)$ est un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$, que $J(x) \neq C^0(K; \mathbb{R})$ et que $J(x)$ est un sous-espace complet de $C^0(K; \mathbb{R})$.
 - b) Soit $f_0 \in C^0(K; \mathbb{R}) \setminus J(x)$.
Montrer que, pour toute fonction $h \in C^0(K; \mathbb{R})$, il existe $f \in J(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $h = f + \lambda \cdot f_0$.
En déduire que $J(x)$ est maximal dans $C^0(K; \mathbb{R})$, i.e. si I est un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$ avec $J(x) \subset I$ et $J(x) \neq I$, alors $I = C^0(K; \mathbb{R})$.

3) Soit I un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$ avec $I \neq C^0(K; \mathbb{R})$.

a) Soit $f \in I$. Montrer que $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

(On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction $g := \frac{1}{f}$.)

b) Soient $f_1, \dots, f_n, n$ éléments de I .

Justifier que $f = \sum_{i=1}^n f_i^2 \in I$. En déduire que $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

c) Déduire de la question 3b) que $\bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\})$ est non vide et qu'il existe $x \in K$ tel que $I \subset J(x)$.

4) Déduire des questions 2 et 3 que l'application $x \mapsto J(x)$ de K dans l'ensemble $\mathcal{M}$ des idéaux maximaux de $C^0(K; \mathbb{R})$ est bijective.