

Examen Anneaux et Arithmétique
L3, Module E04, semestre 2 (2005-2006)
Mardi 9 Mai 2006
Université Rennes I

Documents interdits. Durée 2 heures. Une rédaction soignée est attendue.

Exercice 1. Soient

$$P = 3X^2 + 4X + 1,$$

$$Q = 3X^2 + X + 1,$$

deux éléments de $K[X]$, où K est un corps. Dire si la classe de P est inversible dans $K[X]/(Q)$, et si oui précisez son inverse, dans les cas suivants :

a) $K = \mathbb{Q}$.

b) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^3 = 2$$

dans les anneaux suivants :

a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$,

c) $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$,

d) $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

Montrez que l'anneau quotient

$$\mathbb{Z}[X, Y]/(X^3 + X^2Y^2 + XY^3 + Y),$$

est un anneau intègre.

Problème.

Soit $A_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes, c'est à dire des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui admettent une écriture

$$f(x) = \sum_{n=-k}^k a_n e^{inx},$$

pour un certain entier k et des nombres complexes a_n . On notera que, les nombres a_n étant les coefficients de Fourier de f , ils sont bien définis de manière unique par f pour tout n . Définissons $A_{\mathbb{R}}$ comme le sous-ensemble des polynômes trigonométriques réels, c'est à dire de telles fonctions à valeurs réelles.

1) Montrez que $A_{\mathbb{C}}$ et $A_{\mathbb{R}}$, munis de l'addition et la multiplication ponctuelle, sont des anneaux.

2) Montrez que $f \in A_{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout n , on a $a_{-n} = \overline{a_n}$.

3) On définit le degré $d(f)$ du polynôme trigonométrique $f \in A_{\mathbb{C}} - \{0\}$ comme le plus grand entier m tel que ($a_m \neq 0$ ou $a_{-m} \neq 0$). Montrez que si $f, g \in A_{\mathbb{R}}$ sont tous deux non nuls, on a

$$d(fg) = d(f) + d(g).$$

Cette égalité est-elle encore vérifiée en général dans $A_{\mathbb{C}}$?

4) Déterminez l'ensemble des inversibles de l'anneau $A_{\mathbb{R}}$.

5) Montrez que les trois fonctions suivantes sont dans $A_{\mathbb{R}}$ et sont irréductibles dans cet anneau : $\sin(x), 1 + \cos(x), 1 - \cos(x)$.

6) Montrez, en considérant l'égalité

$$\sin^2(x) = (1 - \cos(x))(1 + \cos(x)),$$

que $A_{\mathbb{R}}$ n'est pas factoriel.