

Année universitaire 2005-2006
Licence de mathématiques (troisième année)
Géométrie euclidienne
Examen terminal du 9 mai 2006

*La durée est de deux heures. Les documents et calculatrices sont interdits.
Barème indicatif : 5 points pour l'exercice 1, 3 points pour l'exercice 2, 4 points pour l'exercice 3, 3 points pour l'exercice 4, 5 points pour l'exercice 5.*

Exercice 1. Soit P un plan affine euclidien orienté et soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct de P . Par « éléments remarquables » d'une isométrie de P on entend, selon le contexte, l'axe, l'angle, le centre, le vecteur de glissement...

a) Soit a un réel et soit f_a l'application affine de P dans P donnée dans $\mathcal{R}$ par la formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\sqrt{3}/2)x - (1/2)y + 1 \\ (1/2)x + (\sqrt{3}/2)y + a \end{pmatrix}.$$

Donnez, en fonction de a , la nature et les éléments remarquables de f_a .

b) Soit b un réel et soit g_b l'application affine de P dans P donnée dans $\mathcal{R}$ par la formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1/2)x + (\sqrt{3}/2)y + b \\ (\sqrt{3}/2)x - (1/2)y + 1 - b \end{pmatrix}.$$

Donnez, en fonction de b , la nature et les éléments remarquables de g_b . Pour quelle valeur de b l'application g_b a-t-elle un point fixe ?

Exercice 2. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne habituelle. Soient A et B les points de coordonnées respectives $(1, 0, -1)$ et $(2, 1, 1)$. Décrire précisément l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ tels que $MA = 4MB$.

Exercice 3. On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne habituelle. Soient A , B et C les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 5)$ et $(1, -2)$. Soit G le barycentre de $((A, 1), (B, 2), (C, 1))$.

a) Calculez les coordonnées de G .

b) Si M est un point de $\mathbb{R}^2$ rappelez sans démonstration la formule (vue en cours) qui exprime $MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ en fonction de M et G .

c) Décrire en fonction du réel λ l'ensemble E_λ des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = \lambda$.

Exercice 4. Soit P un plan affine euclidien et soit D une droite de P . Soit σ la réflexion d'axe D et soit $\vec{u}$ un vecteur orthogonal à la direction $\vec{D}$ de D .

Montrez que $t_{\vec{u}} \circ \sigma$ a un point fixe. *Indication : on pourra introduire un repère orthonormé adapté à la situation.*

Exercice 5. Soit $\vec{E}$ un espace *vectoriel* euclidien de dimension 3, soit r une rotation de $\vec{E}$, différente de l'identité, dont on note $\vec{\Delta}$ l'axe. Soit u une isométrie de $\vec{E}$.

- a) Montrez que uru^{-1} est une rotation de $\vec{E}$.
- b) Montrez que l'axe de uru^{-1} est $u(\vec{\Delta})$.
- c) Montrez que le cosinus de l'angle de uru^{-1} est égal au cosinus de l'angle de r .
- d) *Question dans l'esprit des précédentes, mais plus délicate.* Si s est une réflexion de $\vec{E}$ par rapport à un plan $\vec{P}$, montrez que usu^{-1} est la réflexion par rapport à $u(\vec{P})$.