

Examen terminal du 10 mai 2006
Durée 2 heures

Justifiez toutes vos réponses!!! Seuls les résultats du cours pourront être admis.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème envisagé est entre parenthèses et est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Exercice sur 8 points) Les questions 2 et 3 sont indépendantes.
On pourra admettre les résultats des questions non résolues pour traiter les questions suivantes.

Soit k un paramètre réel. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le rang de f est 2.
2. (a) Justifier sans calcul que :
 - i. Le polynôme caractéristique de f est de la forme $X^4 - kX^3 + \alpha_2X^2 + \alpha_1X$, où α_1 et α_2 sont des constantes réelles.
 - ii. Dans le polynôme caractéristique de f ci-dessus on a $\alpha_1 = 0$.
- (b) Calculer le polynôme caractéristique de f .
- (c) En justifiant avec un théorème du cours, déterminer une matrice B non nulle telle que $A^2B = BA^2 = 0$.

Indication : On pourra donner B comme polynôme en A
3. On considère le vecteur

$$b = \begin{bmatrix} u \\ u^2 \\ k - u \\ u \end{bmatrix}.$$

Pour quelle valeur de u existe-t-il un vecteur v dans $\mathbb{R}^4$ tel que $f(v) = b$? Déterminer alors l'ensemble de ces vecteurs.

TOURNER SVP

Exercice 2 (Exercice sur 12 points) Les questions 2 et 3 sont indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions non résolues pour traiter les questions suivantes.

Soit a un paramètre réel. On note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & -1 \\ a & 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ -a & 0 & a & 2 \end{bmatrix}$$

On admettra dans tout l'exercice que M vérifie la relation

$$M^2 = (a + 2)M$$

1. Que peut-on dire des valeurs propres de M ?
2. On suppose dans cette question que a est différent de -2.
 - (a) Justifier que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer en justifiant avec un théorème du cours que

$$\mathbb{R}^4 = \ker(M) \oplus \ker(M - (a + 2)I_4)$$

- (c) Montrer que le rang de M et le rang de $M - (a + 2)I_4$ sont supérieurs ou égaux à 2.
 - (d) Dédire des questions précédentes les dimensions de $\ker(M)$ et $\ker(M - (a + 2)I_4)$.
3. On suppose dans cette question que $a = -2$, et M vérifie alors la relation $M^2 = 0$.
 - (a) Justifier que M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que si M est diagonalisable, alors M est la matrice nulle. En déduire que M n'est pas diagonalisable.
 - (c) On note L_i la i -ème ligne de la matrice M .
Montrer que L_1 et L_4 appartiennent à $\langle L_2, L_3 \rangle$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par L_2 et L_3 .
 - (d) Donner une base de $\ker(M)$.
 - (e) Donner une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = P^{-1}MP$.
 - (f) Donner la décomposition de Dunford (décomposition $D + N$) de M .