

Licence de Mathématiques : CO4
Examen du 9 mai 2006
Durée : 2 heures

Exercice 1 (5 points). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$ et que Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

- 1) Donner la loi du couple (X, Y) sous forme de tableau.
- 2) On introduit les v.a.r. $U = X + Y$ et $V = XY$.
 - a) Déterminer la loi du couple (U, V) .
 - b) En déduire les lois des v.a.r. U et V . Ces v.a.r. sont-elles indépendantes ?
 - c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (U, V) .

Exercice 2 (3 points). Soient α un nombre réel positif et h_α la fonction de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_\alpha(x) = \alpha(1 - x^2) \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} \alpha(1 - x^2) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 1) Montrer qu'il existe une unique valeur (que l'on calculera) a de α pour laquelle h_α est une densité de probabilité.
- 2) Soit X une v.a.r. de loi de densité h_a .
 - a) Déterminer la fonction de répartition de X .
 - b) Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 3 (3 points). La longueur X (exprimée en centimètres) des feuilles d'une plante suit une loi normale $\mathcal{N}(10, \sigma^2)$. Sur 10000 feuilles mesurées, on a obtenu $\mathbb{P}\{8 \leq X \leq 12\} = 0,84$.

- 1) A partir des mesures précédentes, montrer que l'on est amené à prendre $\sigma \simeq 1,42$.
- 2) Calculer $\mathbb{P}\{X \leq 10\}$ et $\mathbb{P}\{9 \leq X \leq 11\}$.
- 3) Chercher $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\{10 - x \leq X \leq 10 + x\} = 0,95$.

Problème (3 + 6 points). Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

I. 1) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $X_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

a) Quelle est la loi de X_n ? Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\text{Var}(X_n)$.

b) On prend $n = 200$ et $p = 1/4$. Donner une minoration de la probabilité $\mathbb{P}[\{40 < X_{200} < 60\}]$ en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Donner une approximation de la probabilité $\mathbb{P}[\{40 < X_{200} < 60\}]$ en utilisant le théorème de la limite centrée.

II. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = U_n U_{n+1}$.

1) a) Déterminer la loi commune des v.a.r. $Y_n, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour $1 \leq i < j$, étudier l'indépendance des v.a.r. Y_i et Y_j et calculer leur covariance (on distinguera les cas $j = i + 1$ et $j > i + 1$).

II.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

a) Calculer l'espérance et la variance de la v.a.r. S_n . En particulier, on montrera qu'il existe un réel positif C tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $\text{Var}(S_n) \leq C n$.

b) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la v.a.r. S_n , montrer que la suite de v.a.r. $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers p^2 , quand n tend vers $+\infty$.