

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice I.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 \cos(\frac{x}{2})$. Les racines de f sont les points fixes de la fonction $g : x \mapsto g(x) = x + f(x)$. On considère la méthode itérative associée à g : la suite des itérés $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par $x_{k+1} = g(x_k)$ ($k \geq 0$).

1. Pour le point fixe $r_1 = \pi$, est-ce que l'on a convergence locale de la méthode itérative ? Si vous répondez oui, déterminez l'ordre de la convergence locale.

2. Même question pour le point fixe $r_2 = -\pi$.

3. On considère maintenant l'algorithme itératif de Newton pour l'approximation des racines de f . Préciser la fonction d'itération h telle que la méthode de Newton soit donnée par la récurrence $z_{k+1} = h(z_k)$, ($k \geq 0$).

4. Démontrer pour toutes les racines de f : La méthode de Newton converge localement, et l'ordre de convergence est supérieur ou égal à 3.

Exercice II. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. Calculer les différences divisées nécessaires au calcul du polynôme d'interpolation de Hermite $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ de f aux points $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi)$. Il s'agit du polynôme satisfaisant les conditions :

$$p_3(0) = f(0), \quad p_3(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}), \quad p'_3(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}), \quad p_3(\pi) = f(\pi).$$

Pour le calcul de ces différences divisées on utilisera pour $x = \frac{\pi}{2}$ le fait que $f[x, x] = f'(x)$.

2. En déduire que le polynôme p_3 s'écrit

$$p_3(x) = \frac{4}{\pi} x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right).$$

3. Calculer le polynôme $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ satisfaisant les conditions :

$$p_2(0) = 0, \quad p_2(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad p'_2(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

4. L'intégrale $I(f) = \int_0^\pi f(x) dx$ est approchée par l'intégrale de p_3 :

$I(p_3) = \int_0^\pi p_3(x) dx$. Calculez ces 2 intégrales ainsi que l'erreur d'intégration commise lorsque l'on approche $I(f)$ par $I(p_3)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n(f)$ l'approximation de $I(f)$ par la méthode des Trapèzes avec une subdivision régulière de pas $h = \frac{\pi}{n}$. Sachant qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que l'erreur de la formule de quadrature simple des trapèzes s'écrive

$$E_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

donner l'erreur de la formule d'intégration composée des trapèzes sur $[0, \pi]$. En déduire le nombre de subdivision n à partir duquel la méthode des trapèzes est plus précise que la méthode décrite à la question précédente.

Exercice III.

Sur l'intervalle $[0, 1]$, on considère la fonction poids w définie par $w(x) = 2x$.

1. Calculer les 3 premiers polynômes orthogonaux correspondants P_n ($n = 0, 1, 2$), standardisés tels que le coefficient de x^n dans $P_n(x)$ soit 1.

2. Utiliser P_1 et P_2 pour déterminer les nœuds des formules de quadrature de Gauss G_1 à 1 point et G_2 à 2 points pour l'approximation de l'intégrale

$$(1) \quad I(f) = \int_0^1 2xf(x) dx.$$

On ne cherchera pas à calculer les poids intervenant dans les formules.

3. Pour l'approximation de l'intégrale $I(f)$ de (1), on veut construire une formule de quadrature de la forme

$$Q_2(f) = af(0) + bf(c) \quad \text{avec des nombres } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

Calculer a, b, c tels que Q_2 soit d'ordre ≥ 2 .

4. La formule Q_2 trouvée dans la question 3 est-elle d'ordre 3 ?