
Examen Terminal

Durée : 2 heures

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *concave*, qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$f(n) = n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que f est surjective.
2. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$x_n \in]n, n + 1[\quad \text{et} \quad f'(x_n) = 1.$$

3. En déduire que $f(x) = x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et *convexe*.

1. En utilisant un changement de variables adéquat, montrer que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^1 f(bt + (1 - t)a) dt.$$

2. En déduire que

$$(\star) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{2}(b - a)(f(b) + f(a)).$$

3. Les membres à gauche et à droite de l'inégalité $(\star)$ correspondent à des aires de surfaces. Dessiner ces surfaces. Comment s'interprète alors l'inégalité $(\star)$?

Problème

On note $I :=] - 1, +\infty[$. On considère la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = (2 + x)^{-1} |\ln(1 + x)|^{-3/2} \sin x, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}.$$

1. Soit $J = (\alpha, \beta)$ avec $-1 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.
Rappeler ce que signifie la phrase " f est localement intégrable sur l'intervalle J ".
2. Expliquer pourquoi la fonction f est localement intégrable sur chacun des deux intervalles $] - 1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

T.S.V.P. $\longrightarrow$

3. Déterminer la limite de f lorsque $x \in I$ tend vers -1 . Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{-1/2} f(x) dx$? Justifier.
4. Donner un équivalent de f lorsque x tend vers 0 en étant négatif ($x < 0$). Même question lorsque x tend vers 0 en étant positif ($x > 0$).
5. Quelles sont les natures des intégrales généralisées $\int_{-1/2}^0 f(x) dx$ et $\int_0^2 f(x) dx$? Justifier.
6. Montrer que :

$$|f(x)| \leq x^{-1} (\ln x)^{-3/2}, \quad \forall x \in [2, +\infty[.$$
7. Calculer $\int_2^{+\infty} x^{-1} (\ln x)^{-3/2} dx$.
8. Expliquer pourquoi f est intégrable (c'est à dire absolument convergente) sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
9. Quelle est la nature de $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$? Justifier.
10. Etant donné $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(t) := \int_2^{+\infty} \tilde{f}(t, x) dx, \quad \tilde{f}(t, x) = (2+x)^{-2} |\ln(1+x)|^{-3/2} \sin(tx).$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

11. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée $F'(t)$ à l'aide d'une formule intégrale.