

Examen Terminal

Mercredi 04 Janvier 2006

Durée : 2 heures

Première Partie Intégralité de Jensen

1. Justifier que la fonction ℓn est concave sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire que si $a_1, \dots, a_n$ sont n nombres réels strictement positifs on a :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

3. Soit f une fonction continue strictement positive sur l'intervalle $[0, 1]$.
Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et k un entier, $k \in [1, 2, \dots, n]$.

On pose $a_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Justifier que : $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ell n a_k \leq \ell n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)$.

En déduire que : $\int_0^1 \ell n f(t) dt \leq \ell n \left(\int_0^1 f(t) dt \right)$.

Deuxième Partie

A – Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose $h(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

1. Montrer que h est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. En écrivant que $h(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, justifier que h est continue, dérivable sur $]0, +\infty[$.
Calculer $h'(x)$.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.
4. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est convergente et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = I$.
5. Montrer que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et que $I = 2J$.

B – Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x t^2}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que g est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$ et que $g(0) = \frac{\pi}{2}$.
3. Justifier que $g(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
4. Soit $\alpha > 0$. Montrer que g est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.
En déduire que :

$$(\star) \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad , \quad g'(x) - g(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt$$

5. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt = \frac{J}{\sqrt{x}}$.
6. On pose : $g(x) = \lambda(x) \cdot e^x$, où $\lambda :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.
Déduire de $(\star)$ qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad , \quad \lambda(x) = -J h(x) + \mu$.
7. Déduire de la question B.2 que : $\mu = \frac{\pi}{2}$.
8. Déduire de la question B.3 que : $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.