

Université de Rennes 1
B04-Licence de mathématiques
Examen terminal mardi 16 mai 2006, 10 heures 30
Durée : 2 heures

Documents autorisés

Documents manuscrits et livre du cours. Calculatrice interdite.

Barème envisagé

I : 3 points; II : 3 points; III : 4 points; IV : 10 points.

Indications générales

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de citer (sans recopier leur énoncé) les résultats du cours utilisés.

Exercice I

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, déterminer, en le justifiant, ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et ceux qui ne le sont pas :

- a) l'ensemble des (x, y, z, t) tels que $2x + 3z = 0$;
- b) l'ensemble des (x, y, z, t) tels que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$;
- c) $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3, u_4)$ où u_1, u_2, u_3, u_4 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$;
- d) l'ensemble des (x, y, z, t) tels que $2x + 3y - z + 2t = -1$.

Exercice II

On considère le système linéaire L de trois équations à trois inconnues dépendant du paramètre réel a :

$$\begin{cases} x + (a-3)y + (a+2)z = a+1 \\ \quad \quad \quad ay + \quad \quad \quad az = a^2 + 3a \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad a(a^2-1)z = a^2 - a \end{cases}$$

- 1) Dans quels cas ce système est-il de rang strictement inférieur à 3 ?
- 2) Déterminer l'ensemble $S(L)$ des solutions du système L dans chacun des cas trouvés au 1). On ne demande pas de résoudre le système dans le cas général.

Exercice III

1) On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels.

Parmi les applications $f : E \rightarrow E$ définies ci-dessous par leurs valeurs pour les polynômes P de E , déterminer (en le justifiant) celles qui sont linéaires et celles qui ne le sont pas.

a) $f(P) = 2P + 1$;

b) $f(P) = (X - 1)P'$ où P' note le polynôme dérivé de P ;

c) $f(P) = P^2$.

2) On note $F = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et $f : F \rightarrow F$ l'application définie par $f(P) = (X - 1)P'$.

Déterminer la matrice de f par rapport à la base $(1, X, X^2, X^3)$.

3) Déterminer le noyau et l'image de f ; préciser leurs dimensions.

Exercice IV

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par les vecteurs :

$$\varepsilon_1 = (1, 2, 1) ;$$

$$\varepsilon_2 = (2, 5, 5) ;$$

$$\varepsilon_3 = (2, 3, -2) ;$$

1) Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs de C .

3) Donner l'inverse P^{-1} de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

On définit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$f(e_1) = (-4, -20, -45), f(e_2) = (2, 11, 26), f(e_3) = (0, -2, -7).$$

4) Justifier l'existence de f .

5) Donner la matrice A de f dans la base B .

6) Calculer $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)$ dans la base C , puis la matrice D de f dans la base C .

7) Dédire de la question précédente le noyau et l'image de f .

8) Montrer que $D = P^{-1}AP$ (une justification sans calcul de cette formule sera appréciée).