

Licence Sciences, Technologie, Santé - Portail MIPE*B03 : Ensembles, applications, relations, groupes.*

Examen du mardi 9 mai 2006 - Début : 14h Durée : 2h

L'examen comporte trois exercices complètement indépendants. Tout résultat doit être justifié par une démonstration précise et rigoureuse. L'utilisation ou la consultation de documents n'est pas autorisée. Il en va de même des calculatrices. La qualité de la rédaction, ainsi que la présentation générale de la copie sera appréciée dans la note finale. Bon courage.

Exercice 1 (10 points)

Le but de cet exercice est de démontrer que $\mathbf{N}^2$ est dénombrable en construisant un dénombrement explicite.

Soit $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une application satisfaisant

$$(*) \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbf{N}, \quad f(s) < f(s+1).$$

1. Montrer que f est strictement croissante, c'est à dire que

$$\forall s, s' \in \mathbf{N}, \quad s < s' \Rightarrow f(s) < f(s').$$

On pourra faire une récurrence sur la différence $d := s' - s$.

2. Montrer que la famille de sous-ensembles

$$I_s = \{f(s), f(s) + 1, f(s) + 2, \dots, f(s+1) - 1\} \quad (s \in \mathbf{N})$$

est une partition de $\mathbf{N}$.

Dans le reste de cet exercice, on suppose que f est définie par récurrence par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbf{N}, f(s+1) = f(s) + s + 1.$$

Nous observons que f satisfait bien la propriété (*).

3. Écrire f comme fonction numérique (rationnelle) de s .
4. La fonction f est-elle injective, surjective, bijective ?

On définit la fonction $\varphi : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ par

$$\varphi(m, n) = f(m+n) + n.$$

5. Montrer que

$$\forall m, n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(m, n) \in I_{m+n}$$

6. En déduire que φ est injective.

7. En déduire aussi que φ est surjective.

8. Montrer que $\mathbf{N}^2$ est dénombrable.

Exercice 2 (8 points)

Dans cet exercice, on désigne par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit C l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$. On considère la relation $\geq$ sur C définie par

$$f \geq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq g(x).$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.

2. Est-ce un ordre total ?

3. L'ensemble ordonné C a-t-il un plus petit élément ?

4. On considère le sous-ensemble A de C contenant les 3 fonctions

$$x \mapsto \exp(x), \quad x \mapsto \exp(-x), \quad \text{et} \quad x \mapsto |x| + 1$$

Y-a-t'il des éléments minimaux dans A ? Si oui, lesquels ?

5. Le sous-ensemble

$$B = \{f \in C, f(0) > 1\}$$

a-t-il une borne inférieure ?

On considère la relation $\sim$ sur C définie par

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}, |f(x) - g(x)| \leq M.$$

6. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

7. Donner l'exemple de deux fonctions qui appartiennent à des classes distinctes.

On définit une autre relation d'équivalence $\approx$ par

$$f \approx g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}_+, |f(x) - g(x)| \leq M.$$

8. Décrire l'ensemble quotient $C/\approx$.

Exercice 3 (2 points)

Dans le groupe symétrique S_6 , on considère l'élément

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition en cycles disjoints de σ .

2. Calculer σ^{32} .