

**Licence Sciences, Technologie, Santé - Portail MIPE***B03 : Ensembles, applications, relations, groupes.*

Examen du mercredi 4 janvier 2006 - Début : 14h30 - Durée : 2h

Bonjour. L'examen comporte deux exercices complètement indépendants sur 10 points chacun. Tout résultat doit être justifié par une démonstration précise et rigoureuse. L'utilisation ou la consultation de documents n'est pas autorisée. Il en va de même des calculatrices. Appliquez vous ! Bon courage.

## Exercice 1

Soit  $E$  un ensemble. On rappelle que  $\mathcal{P}(E)$  désigne l'ensemble des parties de  $E$ . On rappelle aussi que si  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ , la *différence* entre  $A$  et  $B$  est l'ensemble

$$A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$$

et que leur *différence symétrique* est

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que

$$((A \setminus B) \subset D) \text{ et } ((B \setminus C) \subset D) \implies ((A \setminus C) \subset D).$$

2. Soit  $D$  une partie fixée de  $E$ . On définit sur  $\mathcal{P}(E)$  la relation  $\mathcal{R}$  par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), ((A \mathcal{R} B) \iff ((A \Delta B) \subset D)).$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.  
 (b) Soit  $B \in \mathcal{P}(E)$ . Expliciter la classe d'équivalence  $\overline{B}$  de  $B$  pour la relation  $\mathcal{R}$ .  
 3. Les notations sont celle de la question 2. On suppose que  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et que  $D = \{1, 2\}$ .  
 (a) Donner le nombre d'éléments de  $\mathcal{P}(E)$ .  
 (b) Déterminer tous les éléments de l'ensemble quotient  $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ . Retrouver alors le nombre d'éléments de  $\mathcal{P}(E)$ .

## Exercice 2

On rappelle que les bijections de  $\mathbf{R}^2$  sur lui-même forment un groupe pour la composition  $\circ$ . On rappelle que si  $h$  est une bijection de  $\mathbf{R}^2$  sur lui-même et  $n \in \mathbf{N}$ , l'*itéré  $n$ -ème* de  $h$  est défini par récurrence par

$$h^0 = \text{Id} \quad \text{et} \quad h^n = h^{n-1} \circ h \quad \text{pour } n > 0.$$

Enfin, on rappelle aussi que l'*ordre* de  $h$  est le plus petit entier naturel  $n$  non nul tel que  $h^n = \text{Id}$ , s'il existe, et  $\infty$  sinon.

On considère les applications

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\xrightarrow{f} \mathbf{R}^2 & \text{et} & \quad \mathbf{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, -x - y) & & \quad (x, y) \longmapsto (-y, x) \end{aligned}$$

- Montrer que  $f$  est bijective et déterminer son inverse.
- Montrer que  $g$  est bijective et déterminer son inverse.
- Calculer  $g \circ f$  et  $f \circ g$ . A-t-on égalité ?
- L'application  $f$  est-elle d'ordre fini ? Si oui quel est son ordre ? Même question avec  $g$ .
- Calculer  $(g \circ f)^n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  (faire une récurrence sur  $n$ ).
- L'application  $g \circ f$  est-elle d'ordre fini ? Si oui quel est son ordre ?