

Avertissement :

L'énoncé comporte trois pages, deux exercices et un problème (exercice long). Des résultats utilisables pour la résolution des questions sont donnés à la fin de cet avertissement. Les documents et calculettes sont **interdits**.

On rappelle qu'au sein d'un exercice on peut répondre à une question en utilisant les résultats précédents même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. On rappelle aussi que, sauf mention contraire explicite, toute réponse à une question doit être justifiée.

On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants.

- R1 La fonction $\sqrt{\cdot} : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ est la bijection réciproque de la fonction $f : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$. $\sqrt{\cdot}$ est continue, dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $(\sqrt{\cdot})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.
- R2 Pour tout réel a , il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq a < n + 1$. On le note $E(a)$. L'application $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 1. : Questions de cours.

- 1- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de : " -1 est limite à droite de f en 4 ".
- 2- Compléter l'énoncé suivant du cours : "Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ et $\ell \in \mathbb{R}$ $\lim_a f = \ell$... telle que $\lim_n u_n = a$, on a $\lim_n f(u_n) = \ell$ ".
- 3- L'énoncé suivant est-il une conséquence de résultats du cours ? **Répondre par oui ou par non, sans justification.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors f est bijective de I sur $f(I)$ et la bijection réciproque est continue.

Exercice 2. : Soit $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions polynômes définies par $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ et $Q(x) = 2x^2 + x - 1 = 0$. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = E(x^2)$. Soit $D_+ = \{\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $D_- = \{-\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $D = D_+ \cup D_-$ et $S = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) = 0\}$.

- 1- Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus D$. Montrer que g n'est pas continue en $\sqrt{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2- Montrer que g est continue en 0. Y est-elle dérivable ?

3- Soit $f : \mathbb{R} \setminus S \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)/Q(x)$. Montrer que $P(1/2) = Q(1/2) = 0$. Montrer que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/2 \\ \neq}} f(x) = \frac{5}{2}.$$

4- Étudier la limite :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/2 \\ \neq}} (2 + E(x^2)) f(x).$$

Problème

Les parties B) et C) suivantes sont largement indépendantes.

A) Soit $a > 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on considère la fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(y) = ay^2 + by + c$.

A)1. Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, P(y) = a \left(\left(y + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right). \quad (1)$$

A)2. Montrer que, si $\Delta < 0$, il existe $d > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(y) \geq d$.

A)3. On suppose $\Delta \geq 0$ et on pose $y_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $y_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$. Montrer que

$$\forall y \in]y_1; y_2[, P(y) < 0, \quad (2)$$

$$\forall y \in]-\infty; y_1[\cup]y_2; +\infty[, P(y) > 0, \quad (3)$$

$$P(y_1) = P(y_2) = 0. \quad (4)$$

B) Soit $a, \delta > 0$ soit $b, c : [-\delta; \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose qu'il existe une fonction $f : [-\delta; \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\delta; \delta], a(f(x))^2 + b(x)f(x) + c(x) \leq 0. \quad (5)$$

Soit $\Delta_0 : [-\delta; \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Delta_0(x) = b(x)^2 - 4ac(x)$.

B)1. Montrer que, pour tout $x \in [-\delta; \delta]$, $\Delta_0(x) \geq 0$.

B)2. Montrer que, pour tout $x \in [-\delta; \delta]$,

$$f(x) \in \left[\frac{-b(x) - \sqrt{\Delta_0(x)}}{2a}; \frac{-b(x) + \sqrt{\Delta_0(x)}}{2a} \right]. \quad (6)$$

B)3. Montrer que, si $\lim_0 \Delta_0 = 0$ alors f est continue en 0.

B)4. On suppose que, près de 0, $\Delta_0(x) = o(x^2)$ et $b(x) = o(x)$. En déduire que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq}} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (7)$$

(en particulier, $f(x) = o(x)$, près de 0).

C) Dans le cadre introduit en B), on suppose que la fonction Δ_0 est positive mais n'est pas la fonction nulle. On suppose qu'il existe une fonction $g : [-\delta; \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\delta; \delta], \quad a(g(x))^2 + b(x)g(x) + c(x) = 0. \quad (8)$$

C)1. Donner deux fonctions continues g vérifiant (8). On les appellera g_1 et g_2 .

C)2. On suppose $a = 1$, la fonction b nulle et que c est donnée par $c(x) = -(1+x^2)$. Calculer Δ_0 . Trouver une fonction g vérifiant (8) qui n'est pas continue. On l'appellera g_3 .

C)3. On suppose $a = 1$ et que b, c sont données par $b(x) = x^2$ et $c(x) = -x^4/2$. Trouver une fonction g vérifiant (8) qui est dérivable. On l'appellera g_4 .

C)4. On suppose $a = 1$, la fonction b nulle et que c est donnée par $c(x) = -x^2$. Trouver deux fonctions g vérifiant (8), la première étant dérivable, la seconde continue mais pas dérivable. On les appellera respectivement g_5 et g_6 .

Exercice 1 :

1- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R},$

$$(0 < x - a < \delta) \implies (|f(x) + 1| < \epsilon).$$

Ou encore : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R},$

$$(a < x < a + \delta) \implies (|f(x) + 1| < \epsilon).$$

2- Énoncé du cours : “Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, a \in D$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a $\lim_a f = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_n$ d’éléments de D telle que $\lim_n u_n = a$, on a $\lim_n f(u_n) = \ell$.” Une réponse assez bonne est : “Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, a \in D$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\lim_a f = \ell$ alors, pour toute suite $(u_n)_n$ d’éléments de D telle que $\lim_n u_n = a$, on a $\lim_n f(u_n) = \ell$.” car c’est la “moitié” de l’énoncé précédent.

3- Faux. Les résultats du cours à ce sujet supposent toujours que f est continue.

Exercice 2 : Il fallait bien sûr lire “Soit $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions polynômes définies par $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ et $Q(x) = 2x^2 + x - 1$.”.

1- Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2$. La fonction g est la composition de la fonction partie entière E et de f_1 . Comme f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, elle l’est sur $\mathbb{R} \setminus D$. Comme E est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ qui contient $f_1(D)$, on en déduit par composition que g est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme E est constante égale à $n - 1$ (resp. n) sur $[n - 1; n[$ (resp. $]n; n + 1]$),

$$\lim_{\substack{y \rightarrow n \\ y < n}} E(y) = n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow n \\ y > n}} E(y) = n.$$

Comme f_1 est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, $x^2 > n$ pour $x \in]\sqrt{n}; \infty[$, près de n . De même, $x^2 < n$ pour $x \in]-\infty; \sqrt{n}[$, près de n . Par composition de limites, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{n} \\ x < \sqrt{n}}} E(x^2) = n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{n} \\ x > \sqrt{n}}} E(y) = n.$$

Ces limites étant différentes, g n’est pas continue en 0.

2- Pour $x \in]-1; 1[$, $x^2 \in [0; 1[$, donc $E(x^2) = 0$. Donc g est nulle près de 0. Elle y est donc dérivable (hors barème), ce qui implique qu’elle y est continue.

Si l'on n'a pas vu cela, on peut montrer la continuité de g en 0 comme suit.
Comme $x^2 > 0$ pour x près de 0 et différent de 0 et comme $\lim_{0+} E = 0$, on en déduit par composition que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} E(x^2) = 0.$$

Or $g(0) = E(0) = 0$, donc g est continue en 0.

- 3- Un calcul direct montre que $P(1/2) = Q(1/2) = 0$. En particulier $1/2 \in S$ et on a une indétermination de type "0/0".

Les fonctions P et Q sont dérivables de dérivées continues (comme polynômes). De plus, $P'(1/2) = 15/2$ et $Q'(1/2) = 3 \neq 0$. Donc, par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/2 \\ x \neq 1/2}} \frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{5}{2}.$$

D'après la règle de L'Hospital,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/2 \\ x \neq 1/2}} f(x) = \frac{5}{2}.$$

- 4- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \geq 1 > 1/2$ donc $1/2 \notin D$. Donc g est continue en $1/2$ par 1-.
Par somme,

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} (2 + g(x)) = 2 + g(1/2) = 2.$$

Par 3- et par produit,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/2 \\ x \neq 1/2}} (2 + g(x))f(x) = 2 \cdot (5/2) = 5.$$

Problème :

A)1 : On développe le terme de droite de (1) et on obtient $P(y)$.

A)2 : D'après A)1 et le fait que $a > 0$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$P(y) \geq a \cdot \frac{-\Delta}{4a^2} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Comme $\Delta < 0$, on a le résultat demandé pour $d = -\Delta/(4a) > 0$.

On peut aussi étudier les variations de P et montrer que P est minimal en $-b/(2a)$. On peut prendre $d = P(-b/(2a)) = -\Delta/(4a) > 0$.

A)3 : Il s'agissait de **redémontrer** des résultats plus ou moins connus.

D'après A)1, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$P(y) = a \cdot \left(y + \frac{b}{2a} + \frac{\Delta}{4a^2} \right) \cdot \left(y + \frac{b}{2a} - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a(y - y_1)(y - y_2).$$

On a utilisé l'identité remarquable : $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$. Sous cette forme, on voit tout de suite (4). Ensuite on peut faire un tableau des signes de $(y - y_1)$ et $(y - y_2)$. Si $y \in]y_1; y_2[$, $(y - y_1) > 0$ et $(y - y_2) < 0$ donc $P(y) < 0$ (car $a > 0$). Si $y > y_2$, $(y - y_1) > 0$ et $(y - y_2) > 0$ donc $P(y) > 0$. Si $y < y_1$, $(y - y_1) < 0$ et $(y - y_2) < 0$ donc $P(y) > 0$.

B)1 : Soit $x \in [-\delta; \delta]$. Par hypothèse, il existe un y ($f(x)$ par exemple) tel que $ay^2 + b(x)y + c(x) \leq 0$. D'après A)2 pour $b = b(x)$ et $c = c(x)$, si l'on avait $\Delta_0(x) < 0$, alors $ay^2 + b(x)y + c(x) > 0$, pour tout y . Contradiction. Donc $\Delta_0(x) \geq 0$. Ceci est vrai, pour tout $x \in [-\delta; \delta]$.

B)2 : Soit $y_{1;0}, y_{2;0} : [-\delta; \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $y_{1;0}(x)$ et $y_{2;0}(x)$ sont dans l'ordre croissant les bornes de l'intervalle dans lequel $f(x)$ doit se trouver. Soit $x \in [-\delta; \delta]$. Comme $ay^2 + b(x)y + c(x) \leq 0$ pour $y = f(x)$, (3) implique que $f(x) \in]-\infty; y_{1;0}(x)[\cup]y_{2;0}(x); +\infty[$ est impossible. Donc $f(x) \in [y_{1;0}(x); y_{2;0}(x)]$.

B)3 : Comme Δ_0 reste positive, tend vers 0 en 0, et comme $\sqrt{\cdot}$ est continue en 0, $\sqrt{\Delta_0}$ tend vers 0 en 0, par composition. Comme b est continue, on en déduit, par somme et produit, que les fonctions $y_{1;0}$ et $y_{2;0}$ tendent vers $-b(0)/(2a)$ en 0. Par le théorème des gendarmes et (6), f admet une limite en 0 qui vaut $-b(0)/(2a) = f(0)$. Donc f est continue en 0.

B)4 : Cette question est hors barème. Il s'agit essentiellement de reprendre l'argument du B)3.

Remarque : L'hypothèse de positivité de la fonction Δ_0 garantit en fait l'existence d'une fonction g vérifiant (8).

C)1 : Soit $g_1 = y_{1;0}$ et $g_2 = y_{2;0}$. D'après (4), $g(x) a(g(x))^2 + b(x)g(x) + c(x) = 0$, pour tout $x \in [-\delta; \delta]$. Comme Δ_0 reste positive et est continue, $\sqrt{\Delta_0}$ est continue par composition. Comme b est continue, g_1 et g_2 sont continues par somme et produit.

C)2 : Soit $g_3 : [-\delta; \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_3(x) = +\sqrt{1+x^2}$ si $x \in [0; \delta]$ et par $g_3(x) = -\sqrt{1+x^2}$ si $x \in [-\delta; 0[$. Pour tout $x \in [-\delta; \delta]$, on a bien $g_3(x)^2 = -c(x)$. Comme, par composition,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g_3(x) = +1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g_3(x) = -1,$$

g_3 n'est pas continue en 0.

C)3 : On a $y_{1;0}(x) = -x^2(1 + \sqrt{3})/2$ et $y_{2;0}(x) = -x^2(1 - \sqrt{3})/2$, pour tout x . Elles sont clairement dérivables (polynômes). On prend pour g_4 l'une des deux.

C)4 : On a $y_{1;0}(x) = -|x|$ et $y_{2;0}(x) = |x|$, pour tout x . Elles ne sont pas dérivables mais continues. On prend pour g_6 l'une des deux. La fonction $g_5 := [-\delta; \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_6(x) = x$ vérifie (8) et est dérivable.

Barème :

Exercice 1 : 1- : 2 pts, 2- : 2 pts, 3- : 1 pt. Total : 5 pts.

Exercice 2 : 1- : 2 pts, 2- : 1 pt, 3- : 2,5 pts, 4- : 1 pt. Total : 6,5 pts.

Problème :

Partie A : A)1 : 1 pt, A)2 : 1/2 pt, A)3 : 1 pt. Total : 2,5 pts.

Partie B : B)1 : 1/2 pt, B)2 : 1/2 pt, B)3 : 1 pt. Total : 2 pts.

Partie C : C)1 : 1 pt, C)2 : 1 pt, C)3 : 1 pt, C)4 : 1 pt. Total : 4 pts.

Bonus : 1/2 pt pour la dérivabilité de g dans l'exercice 2 question 2-. 2 pts pour B)4 dans le problème.