

Portail MIPE 1ère année . Module A05 : Mathématiques
16 mai 2006
Durée : 2 heures

Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré de centre O . Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\|.$$

1. Parmi les points O, A, B, C, D , quels sont ceux qui appartiennent à Γ ?
2. Identifier le barycentre des points $(B, 1), (C, -1), (D, 1)$, puis le barycentre des points $(A, 1), (B, -1), (D, -1)$.
3. Déterminer l'ensemble Γ .

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 0, 4), B(0, 0, 6)$, et $C(0, 5, 0)$.

1. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) . (AB) coupe l'axe des abscisses au point D , montrer que les coordonnées de D sont $(3, 0, 0)$.
(b) Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
(c) Donner un vecteur normal au plan P défini par A, B, C . En déduire une équation cartésienne de P .
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC .
(a) Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ODH) .
(b) En déduire que (DH) est la hauteur issue de D dans le triangle DBC .
(c) Déterminer une équation cartésienne du plan P' défini par les points O, D, H .
(d) Vérifier que $(DH) = P \cap P'$, en déduire une représentation paramétrique de la droite (DH) .

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(5, 1), B(2, -3)$ et $C(1, -1)$.

1. Soit M un point de coordonnées (x, y) et M' l'image de M par la symétrie centrale s de centre C . Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées de M .
2. On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ecrire les coordonnées (x', y') de l'image M' d'un point $M(x, y)$ par t .
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $t \circ s$.
4. On désigne par s' la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s' \circ s$.

T.S.V.P.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \right\}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et Δ_α la droite passant par le point $A(0; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, \alpha)$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $I(3, 1)$, déterminer son rayon R .
 (b) Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de Δ_α .
 (c) Calculer la distance de I à Δ_α , en déduire que Δ_α coupe $\mathcal{C}$ en deux points si et seulement si $\alpha \in [0; \frac{2}{\sqrt{5}}[$.
 Pour quelle valeur de α , la droite Δ_α est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

2. On se place dans le cas : $\alpha \in [0; \frac{2}{\sqrt{5}}[$.

- (a) Montrer que les points d'intersection B_α et C_α de Δ_α et $\mathcal{C}$ ont pour abscisses respectives :

$$x_{B_\alpha} = \frac{3 - \sqrt{4 - 5\alpha^2}}{1 + \alpha^2} \quad x_{C_\alpha} = \frac{3 + \sqrt{4 - 5\alpha^2}}{1 + \alpha^2}.$$

- (b) Vérifier que le produit $\|\vec{AB_\alpha}\| \cdot \|\vec{AC_\alpha}\|$ est indépendant de α et est égal à $\|\vec{AI}\|^2 - R^2$.
