

Examen terminal de **A04**

Le 5 janvier 2006

Durée 2 heures

*Documents interdits - Calculatrices autorisées***Exercice n°1**

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par le graphe ci-dessous (les segments représentés en pointillés sont des portions de demi-droites):

En justifiant vos réponses par lecture du graphe, répondre aux questions suivantes :

- 1) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- 2) Déterminer $f([-1, 4[)$.
- 3) Déterminer $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-2, 0])$.

Exercice n°2

Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$(\forall n \geq n_0) (n! \geq 2^{n+1})$$

On rappelle que $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°3

Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E . Démontrer les propositions suivantes :

- 1) $(X \subset Y) \implies (A \cap X \subset A \cap Y)$
- 2) $(X \subset Y) \implies (A \cup X \subset A \cup Y)$
- 3) $(A \cap X = A \cap Y \text{ et } B \subset A) \implies (B \cap X \subset B \cap Y)$

A t-on la propriété

- 4) $(A \cup X = A \cup Y \text{ et } B \subset A) \implies (B \cup X \subset B \cup Y) ?$

Exercice n°4

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$. On note $\mathcal{C}_E A$ le complémentaire de l'ensemble A dans E et $\mathcal{C}_F f(A)$ le complémentaire de $f(A)$ dans F .

Montrer que si f est injective, alors $f(\mathcal{C}_E A) \subset \mathcal{C}_F f(A)$.

Exercice n°5

On considère les correspondances suivantes $\left\{ \begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{iz+1} \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} g : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array} \right.$

- 1) Est-ce que f et g sont des applications ?
- 2) Montrer qu'il existe $D \subset \mathbb{C}$ tel que $\left\{ \begin{array}{ccc} f_1 : D & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right.$ définisse une application.
- 2) Est-ce que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des applications bien définies ?
- 3) Montrer qu'il existe $E \subset \mathbb{C}$ tel que $\left\{ \begin{array}{ccc} f_2 : D & \rightarrow & E \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right.$ définisse une bijection.

Déterminer sa bijection réciproque.