

EXAMEN - Méthodes numériques en optimisation
Calculatrice, documents de cours, TD et TP d'OPTI autorisés
Ce sujet comporte 3 exercices sur 2 pages
Durée : 2 heures

Exercice 1.

On étudie, dans cet exercice, une méthode de minimisation sans contrainte d'une fonctionnelle quadratique de la forme

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) .$$

Cette méthode est basée sur un principe itératif semblable à celui de la méthode du gradient à pas optimal mais pour laquelle les directions successives de descente sont imposées.

- **Définition :** On dit que les vecteurs d_i , $i = 0, \dots, n-1$ sont conjugués par rapport à une matrice symétrique définie positive A si

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \implies (Ad_i, d_j) = 0 .$$

- Notons $\{d_i, i = 0, \dots, n-1\}$ une famille quelconque de vecteurs conjugués par rapport à une matrice symétrique définie positive A de $\mathbb{R}^{n \times n}$. On se donne par ailleurs un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.

Soit un vecteur initial $u_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire. A l'étape $(k+1)$, supposant construits les vecteurs $u_1, \dots, u_k$, ce qui sous-entend que les vecteurs $(Au_l - b)$, $l = 0, \dots, k-1$ sont tous différents de zéro, deux cas peuvent se présenter : Ou bien $Au_k - b = 0$ et l'algorithme est terminé, ou bien $Au_k - b \neq 0$, auquel cas on définit le nombre

$$r_k = \frac{(Au_k - b, d_k)}{(Ad_k, d_k)} ,$$

puis le vecteur

$$u_{k+1} = u_k - r_k d_k .$$

1. Justifier le choix de r_k .
2. En supposant que $Au_k - b \neq 0 \quad \forall k = 1, \dots, n-1$, exprimer u_l pour $l = 1, \dots, n$, en fonction de u_0 , $\{r_i, i = 0, \dots, n-1\}$ et $\{d_i, i = 0, \dots, n-1\}$.
3. Montrer que $(Au_k, d_k) = (Au_0, d_k) \quad \forall k = 0, \dots, n-1$.
4. Montrer que la méthode converge en n itérations au plus, vers la solution du système linéaire $Au = b$.
5. Cette méthode est-elle plus intéressante ou moins intéressante qu'une méthode de gradient conjugué non préconditionnée. (*indication : Discuter selon le conditionnement de A*) ?

Solution :

1. A l'étape k , on cherche r_k minimisant l'expression en r donnée par $J(u_k - rd_k)$ cad le polynôme en r , de degré deux et convexe $\frac{1}{2}(Ad_k, d_k)r^2 + (b - Au_k, d_k)r + (\frac{1}{2}Au_k - b, u_k)$ dont la dérivée s'annule bien en $r = r_k$.

2. On montre par récurrence : $\forall l \ u_l = u_0 - \sum_{i=0}^{l-1} r_i d_i$.
3. Découle de la question précédente et des propriétés sur $\{d_i, i = 0, \dots, n-1\}$.
4. On regarde $(Au_n - b, d_k)$:

$$\begin{aligned}
 (Au_n - b, d_k) &= (Au_0, d_k) - \sum_{i=0}^{n-1} r_i (Ad_i, d_k) - (b, d_k) \\
 &= (Au_0, d_k) - r_k (Ad_k, d_k) - (b, d_k) \\
 &= (Au_0, d_k) - (Au_k - b, d_k) - (b, d_k) \text{ par définition de } r_k \\
 &= (Au_0, d_k) - (Au_k, d_k) = 0 \text{ d'après ce qui précède}
 \end{aligned}$$

Enfin, comme les d_i constituent une base de $\mathbb{R}^n$ (on vérifie facilement qu'ils constituent une famille libre), on en déduit que u_n est la solution du système $Au = b$.

5. Si le conditionnement de A est petit, la méthode du gradient convergera plus vite car elle choisira des directions plus efficaces. Si le conditionnement de A est mauvais, la propriété d'orthogonalité des directions de descentes dans la méthode du gradient conjugué est perturbée. Dans ce cas, la méthode proposée dans cet exercice peut être plus intéressante dans la mesure où l'orthogonalité des directions de descentes, d_i , ne sera en aucun cas perturbée.

Exercice 2.

Soient A une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{n \times n}$, B une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$, et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Notons J la fonctionnelle définie par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

Considérons aussi l'ensemble $U = \{v \in \mathbb{R}^n; (Bv, v) = 1\}$.

1. Etablir une caractérisation d'un minimum de J sur U selon la méthode des multiplicateurs de Lagrange (vous vérifierez notamment les conditions d'utilisation de la méthode).
2. Montrer que la caractérisation de la question précédente se ramène à un problème de valeurs propres dans le cas où $b = 0$?

Solution :

1. On n'oublie pas de vérifier les conditions d'utilisation de la méthode notamment celles portant sur les contraintes : Cf. cours. Une condition nécessaire pour que J admette un extremum en u par rapport à l'ensemble des contraintes U , est

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \nabla J(u) + 2\lambda Bu = 0$$

(N'hésitez pas à vérifier que si $\phi(u) = (Bu, u)$ alors $\nabla \phi(u) = 2Bu$.)

Puisque $\nabla J(u) = Au - b$, la condition se réécrit $(A + 2\lambda B)u = b$.

2. Ainsi, pour $b = 0$: $(B^{-1}A + 2\lambda)u = 0$. On se ramène à un problème de valeurs propres de la matrice $B^{-1}A$. (Ici, B est bien inversible puisqu'elle est définie positive).

Exercice 3.

Soient A une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$, b et d deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère que l'inversion de A est simple à réaliser numériquement. On se permettra alors de faire intervenir A^{-1} dans l'expression des solutions demandées. Considérons le problème de minimisation

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in U \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in U \end{cases}$$

où J est la fonctionnelle définie par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

et $U = \{v \in \mathbb{R}^n; (d, v) \leq 0\}$.

1. Ecrire le Lagrangien associé au problème (P) de minimisation de J sur U .
2. Déterminer une expression explicite de la fonction duale associée à (P) .
3. Résoudre le problème dual de (P) .
4. En déduire une expression de la solution de (P) .

Solution :

Remarque 1 : Noter que la difficulté de l'exercice réside dans la considération de la contrainte. Sans contrainte, avec A inversible facilement, la solution serait alors donnée par $u = A^{-1}b$.

Remarque 2 : A est symétrique définie positive. Alors, A^{-1} l'est aussi.

1. Lagrangien associé à (P) : $\forall (v, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad \mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b - \mu d, v)$.
2. La fonction duale est définie par $\mu \mapsto G(\mu) = \mathcal{L}(u_\mu, \mu)$ avec u_μ solution du problème de minimisation sans contrainte :

$$(P_\mu) \quad \text{Trouver } u_\mu \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } J_\mu(u_\mu) \leq J_\mu(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

où J_μ est la fonctionnelle quadratique : $J_\mu(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b - \mu d, v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Après dérivation de J_μ , on trouve : $u_\mu = A^{-1}(b - \mu d)$.

Tous calculs faits : $G(\mu) = -\frac{1}{2}(A^{-1}d, d)\mu^2 + (A^{-1}b, d)\mu - \frac{1}{2}(A^{-1}d, d)$ polynôme de degré 2 concave en μ .

3. Le problème dual de (P) est :

$$(Q) \quad \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que : } G(\lambda) \geq G(\mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^+.$$

La dérivée de G est $G'(\mu) = -(A^{-1}d, d)\mu + (A^{-1}b, d)$, s'annulant en $\mu^* = \frac{(A^{-1}b, d)}{(A^{-1}d, d)}$.

Rappelons que, puisque A^{-1} est définie positive, $(A^{-1}d, d) > 0$.

Deux cas se présentent alors :

- Si $(A^{-1}b, d) \leq 0$, alors G est maximisée sur $\mathbb{R}^+$ en $\lambda = 0$.
 - Si $(A^{-1}b, d) \geq 0$, alors G est maximisée sur $\mathbb{R}^+$ en $\lambda = \mu^* = \frac{(A^{-1}b, d)}{(A^{-1}d, d)}$.
4. La solution de (P) est finalement donnée par la solution de (P_λ) où λ est défini par la question précédente.
 - Si $(A^{-1}b, d) \leq 0$, alors $u = u_\lambda = A^{-1}b$.
 - Si $(A^{-1}b, d) \geq 0$, alors $u = u_\lambda = A^{-1}b - \frac{(A^{-1}b, d)}{(A^{-1}d, d)}A^{-1}d$.

Remarque : Dans le premier cas, $A^{-1}b \in U$. Il est donc normal de retrouver cette solution. Dans le deuxième cas, on vérifie facilement que $(u, d) = 0$, ce qui veut dire que u est sur la frontière de U , ce dont on pouvait se douter à l'avance ...

Fin du corrigé