

UFR MATHÉMATIQUES, UNIVERSITE DE RENNES 1
EXAMEN TERMINAL DE D04 DU 12 MAI 2006 (Durée 2 H)

Aucun document n'est autorisé. On pourra utiliser tous les résultats du cours et des T.D à condition d'y référer.

Question de cours (1 pt)

Donner la définition de l'ordre d'un élément g d'un groupe G .

Exercice 1. (2 pts)

Soit σ la permutation de S_8 définie par $\sigma = (1, 3, 5)(2, 4, 5)(5, 8)(6, 4, 7)$.

Calculer σ^{2006} . Quel est l'ordre de σ^6 ? La permutation σ est-elle élément de A_8 ?

Exercice 2. (4 pts)

On rappelle que le groupe S_4 est engendré par les transpositions $(1, i)$ ($2 \leq i \leq 4$).

Soit H le sous-ensemble de S_4 , $H = \{Id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$.

a) Calculer $(1, i)(j, k)(1, j)(i, k)$ où $i, j, k \in \{2, 3, 4\}$ tous différents.

Montrer que H est un sous-groupe distingué de S_4 .

b) H est-il un sous-groupe de A_4 ? Si oui, est-il distingué dans A_4 ? Si oui, le groupe A_4/H est-il cyclique?

c) Si $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ et $\tau = (1, 2)$, calculer $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

En déduire que S_4/H est isomorphe à S_3 .

Exercice 3. (3 pts)

Un groupe G est dit simple si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et G .

a) Montrer que tout groupe G d'ordre 999 est non simple.

b) Combien d'éléments d'ordre 11 y a-t-il dans G ?

c) Combien d'éléments d'ordre 37 y a-t-il dans G ?

Exercice 4. (3 pts)

Soit G un groupe d'ordre p^n (p est un entier premier et n entier positif). Montrer que si H est un sous-groupe distingué de G , $H \neq \{e\}$ et $Z(G)$ le centre de G , alors $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.

(Indication : Faire agir G sur H par conjugaison.)

Exercice 5. (3 pts)

Soit G un groupe abélien fini et p un entier premier. Montrer que l'ensemble G_p des éléments de G d'ordre une puissance de p est un sous-groupe de G .

Exercice 6. (4 pts)

Soit G un groupe fini d'élément neutre e et H un sous-groupe de G , tel que $H \neq G$ et $H \neq \{e\}$. On note par E l'ensemble des conjugués de H donc $E = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$.

On fait agir G sur E par conjugaison. Soit $m = [G : G_H]$ l'indice du stabilisateur G_H de $H \in E$.

a) Montrer qu'il existe m éléments $g_1, \dots, g_m$ de G tels que

$$E = \{g_1Hg_1^{-1}, \dots, g_mHg_m^{-1}\}.$$

b) On note $A(H) = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$. Montrer que $|A(H)| \leq |G| + 1 - (|G|/|H|)$. En déduire

que $A(H)$ est strictement contenu dans G .

UFR MATHÉMATIQUES, UNIVERSITE DE RENNES 1
EXAMEN TERMINAL DE D04 DU 12 MAI 2006 (CORRIGE)

Question de cours La bonne définition est : L'ordre de g est l'ordre du sous-groupe engendré par g , et non pas le plus petit entier k tel que $g^k = e$. (Auquel cas 0,5 point)

Solution 1. On trouve, en décomposant σ en cycles disjoints, que $\sigma = (1, 3, 5, 8, 2, 4, 7, 6)$ donc un cycle de longueur 8 et d'ordre 8 **(0,5 pt)**. Comme $2006 = 250 \times 8 + 6$, $\sigma^{2006} = \sigma^6 = (1, 7, 2, 5)(3, 6, 4, 8)$ **(0,5 pt)** L'ordre de σ^6 est donc $\text{ppcm}(4, 4) = 4$ **(0,5 pt)**. La signature de σ est $-(1)^{8-1} = -1$ donc σ n'appartient pas à A_8 . **(0,5 pt)**

Solution 2. a) On trouve que $(1, i)(j, k)(1, j)(i, k) = (1, k)(j, i)$, ce qui prouve que H est stable pour la loi de composition. De plus tout élément de H est son propre inverse donc H est un sous-groupe de S_4 . **(0,5 pt)**

On vérifie aisément que $(1, i)(1, i)(j, k)(1, i)^{-1} = (1, i)(j, k)$ et que $(1, i)(1, j)(i, k)(1, i)^{-1} = (1, k)(i, j)$ et donc H est distingué dans S_4 **(0,5 pt)**

b) Les éléments de $H, \neq Id$ sont des produits pairs de transpositions donc $H \subset A_4$. Et comme H est distingué dans S_4 il est a fortiori distingué dans A_4 . **(0,5 pt)**

L'ordre de A_4/H est $12/4 = 3$ donc A_4/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui est cyclique. **(0,5 pt)**

c) On trouve que $\sigma\tau\sigma^{-1} = (2, 3)$. Comme S_4/H a $24/4 = 6$ éléments, S_4/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ qui est commutatif ou S_3 qui n'est pas commutatif. **(0,5 pt)**

Or si S_4/H était commutatif alors $(2, 3) = (1, 2)$ et donc $(2, 3)(1, 2)$ appartiendrait à H . Par suite S_4/H est isomorphe à S_3 . **(1,5 pts)**

Solution 3. a) $999 = 3^3 \times 37$. Le nombre de 37-Sylow est congru à 1 modulo 37 et divise 27 donc il existe un unique 37-Sylow, H , qui par suite est distingué. **(1 pt)**

b) 11 ne divise pas $|G|$ donc on n'a pas d'éléments d'ordre 11 **(0,5 pt)**

c) Les éléments d'ordre 37 se trouvent dans l'unique 37-Sylow. On en a donc 36 car tous les éléments de H différents de l'élément neutre (seul élément d'ordre 1) sont d'ordre un diviseur de 37 qui est premier. **(1,5 pt)**

Solution 4. Si $h \in H \cap Z(G)$, alors l'orbite de h est réduite à $\{h\}$. **(0,5 pt)** Si $h \notin H \cap Z(G)$ alors le cardinal de l'orbite de h divise p^n donc est un p^α ($\alpha > 0$). **(0,5 pt)**. Supposons que $H \cap Z(G) = \{e\}$.. Par la formules des classes on obtient que

$|H| = 1 + \sum_{i=1}^{i=k} p^{\alpha_i}, \alpha_i > 0$ si k orbites d'éléments $\notin H \cap Z(G)$ ce qui est absurde car p est premier. **(2 pts)**

Solution 5. Comme G est abélien choisissons la notation additive et notons par 0 l'élément neutre.

Si g_1 et g_2 sont éléments de G_p donc d'ordre respectifs p^α et p^β on a $p^{\max(\alpha, \beta)}(g_1 - g_2) = 0$ **(1,5 pt)** donc l'ordre de $g_1 - g_2$ est un diviseur de $p^{\max(\alpha, \beta)}$ et comme p est premier une puissance de p . **(1,5 pt)**

Solution 6. a) L'orbite de H a m éléments, car $|GH| = m$ puisque le stabilisateur de H est d'indice m dans G , à savoir $g_1 H g_1^{-1}, \dots, g_m H g_m^{-1}$ d'où la réponse. **(1 pt)**

b) $|A(H)|$ sera maximal si les m conjugués de H n'ont que l'élément neutre en commun. Donc

$$|A(H)| \leq m(|H| - 1) + 1 = |G|/|H|(|H| - 1) + 1$$

(2 pts)

Comme $H \neq G$, $|G|/|H| > 1$ on a $|A(H)| < |G|$ **(1 pt)**