

Numéro d'anonymat : QUELQUES INDICATIONS

D03. Algèbre multilinéaire
Examen final

Mercredi, 10 mai 2006

Les notes et les calculatrices sont interdites. Durée de l'épreuve : 2 heures.

La rédaction doit se faire sur cette feuille; vous pouvez continuer sur la copie
le cas échéant.

Le barème est donné à titre purement indicatif.

1. [4 pt] (Rappel d'une définition.) Soient E un espace euclidien de dimension finie et $f \in \text{End}(E)$. Donner la définition de l'endomorphisme adjoint de f .

L'endomorphisme adjoint f^* de f est l'unique application
linéaire $f^*: E \rightarrow E$ tq. $\langle f^*(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$ pour
tout $x, y \in E$.

2. [6pt] Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$F = \{A \in E : A = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{A \in E : A = \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Quelle est la dimension de E ?

Toute matrice de E est de la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Par ailleurs, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En choisissant
 $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on voit que
 $B_i \in E$ $\forall i=1..4$ tandis que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i B_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Par conséquent la famille $(B_i, i=1..4)$ est libre.
Toute matrice B s'écrit $B = a B_1 + b B_2 + c B_3 + d B_4 \Rightarrow$
 $(B_1, \dots, B_4)$ est une base de $E \Rightarrow \dim E = 4$.

(b) Donner une base de F .

En choisissant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

on constate que $e_1, e_2 \in F$, elles sont indépendantes,
et $\forall A \in F$ s'écrit $A = ae_1 + be_2$.

Par conséquent (e_1, e_2) est une base de F .

(c) Donner une base de G .

De même: $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ constituent
une base de G . (par les mêmes arguments)

(d) Est-il vrai que $E = F \oplus G$?

$$G \in F \cap G \Leftrightarrow [\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : e = ae_1 + be_2 = ce_3 + de_4]$$
$$\Leftrightarrow [\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} : ae_1 + be_2 - ce_3 - de_4 = 0]$$

or (e_1, e_2, e_3, e_4) sont indép. $\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$.

$$\Leftrightarrow F \cap G = \{0\} \Rightarrow E = F \oplus G$$

3. [6 pt] Soit E l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Soit $f \in \text{End}(E)$ représenté, dans la base canonique de E , par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les sous-espaces propres de A .

le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$

Valeurs propres = $\{\lambda \in \mathbb{R} : \chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda+1)^2 = 0\} = \{1, -1\}$

or -1 est v.p. double.

Si V_λ est le sous-esp. propre associé à λ , on a

$$V_1 = \ker(A - I_3) = \{x \in E : (A - I_3)x = 0\} : (A - I_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} -x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{Donc, en choisissant } u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } V_1 = \text{span } u_1.$$

$$V_{-1} = \ker(A + I_3) = \{x \in E : (A + I_3)x = 0\}$$

$$\text{Avec } u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } V_{-1} = \text{span}(u_2, u_3).$$

(b) En déduire la nature géométrique de f . (Est-ce une rotation? Si oui, donner l'axe et l'angle de rotation. Est-ce une symétrie? Si oui, par rapport à quoi?)

les vecteurs colonnes de A sont orthonormés $\Rightarrow f$ est une isométrie. Par ailleurs $\det A = \chi_A(0) = 1 \Rightarrow f$ est une rotation. $f \neq \text{id}_E \Rightarrow f$ est une rotation non-triviale.

Tout vecteur x de l'axe de rotation vérifie $f(x) = x$

$$\Rightarrow x \in V_1$$

L'hyperplan $H \perp V_1$ coïncide avec V_{-1} car les sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux et $\dim V_{-1} = 2$.

Par ailleurs, les vecteurs (u_1, u_2, u_3) sont orthonormés et $\det(u_1, u_2, u_3) = 1 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée directe.

Dans cette base, f est représenté par une matrice de la forme $B = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\text{tr} B = -1 = 1 + 2\cos \theta \Rightarrow$

$$\cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \sin \theta = 0.$$

Donc f sera représenté dans (u_1, u_2, u_3) par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. [6pt] Soit E l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Soit $f \in \text{End}(E)$ représenté, dans la base canonique de E , par la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que f est une rotation.

les vecteurs colonnes de A sont orthonormés $\Rightarrow f$ est une isométrie. Par ailleurs $\det A = 1 \Rightarrow f$ est une rotation.

(b) Déterminer un vecteur u_1 avec $\|u_1\| = 1$, appartenant à l'axe de rotation.

L'axe de rotation contient les vecteurs propres associés à la v.p. 1 i.e. $Ax = x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$x \in \ker(A - I_3) \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer deux vecteurs u_2 et u_3 , avec $\|u_2\| = \|u_3\| = 1$, tels que (u_1, u_2, u_3) soit une base orthonormée directe de E .

$$H \perp u_1 \Leftrightarrow H = \{x \in E : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H \text{ et } \|u_2\| = 1.$$

Posons $u_3 = u_1 \wedge u_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ où (e_1, e_2, e_3) base canonique

$$\text{avec } \alpha_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = +\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \alpha_2 = -\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(d) Quelle matrice représente f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

$$f \text{ est représentée par } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \text{tr} A = 2 = 1 + 2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \pi/3$$

$$\sin \theta = \langle u_3 | f(u_2) \rangle$$

$$\text{Or } f(u_2) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\langle u_3 | f(u_2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} (1 + 0 - 2) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pi/3$$

$$\text{Donc } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Fin de l'épreuve