

Contrôle du 28 septembre 2005

Sujet

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits
Barème indicatif et sans engagement : 4, 4, 6, 6

I. 1) Que signifie l'affirmation " $\mathbb{R}$ est archimédien" ?

2) Montrer que $\mathbb{Q}$ est archimédien.

II. Soient $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) L'ensemble A est-il majoré ? Justifier la réponse.

2) L'ensemble $f(A)$, image de A , est-il majoré ? Justifier la réponse.

T.S.V.P.

III. Soient X et Y deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x \in X$ tel que, pour tout $y \in Y$, on ait $x \leq y$.

Pour chacune des questions suivantes répondre << Vrai >> ou << Faux >> sans justifier la réponse (2 points par réponse correcte, -2 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention) :

- | | | |
|---|------|------|
| 1) X est majoré. | Vrai | Faux |
| 2) Y est minoré. | Vrai | Faux |
| 3) Si X a une borne supérieure M et Y une borne inférieure m , celles ci vérifient $M \leq m$. | Vrai | Faux |

IV. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) On suppose que $f(\mathbb{R})$ est majorée. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'ensemble $f([-n, n])$ est majoré.

2) On suppose encore que $f(\mathbb{R})$ est majorée. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n la borne supérieure de $f([-n, n])$. Montrer que l'ensemble $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.

3) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f([-n, n])$ est majoré et que l'ensemble B , défini ci dessus, est majoré. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est majorée.

Corrigé

I. 1) Que signifie l'affirmation "ℝ est archimédien" ?

Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y il existe un entier n tel que $nx > y$.

2) Montrer que ℚ est archimédien.

Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$ avec $x > 0$. Les nombres rationnels x et y peuvent s'écrire $x = a/b$ et $y = c/d$ où a, b, c, d sont des entiers vérifiant $a \geq 1, b \geq 1, d \geq 1$. Pour $y < 0$ la propriété est évidente : $nx > y$ en prenant, par exemple, $n = 1$. Pour $y \geq 0$, donc $c \geq 0$, on a

$$bcx = ac \geq c \geq c/d = y$$

d'où $nx > y$ en prenant $n = bc + 1$. Donc $\mathbb{Q}$ est archimédien.

II. Soient $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.**1) L'ensemble A est-il majoré ? Justifier la réponse.**

Tout entier $n \neq 0$ vérifie $\frac{1}{n} \leq 1$ donc A est majoré par 1.

2) L'ensemble $f(A)$, image de A , est-il majoré ? Justifier la réponse.

Non : Supposons que y est un majorant de $f(A)$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n1 = n > y$; quitte à remplacer n par $n + 1$ on peut supposer $n \neq 0$; alors $n = f(\frac{1}{n})$ et $n \in f(A)$ donc y n'est pas un majorant de $f(A)$ d'où une contradiction. L'ensemble $f(A)$ n'est pas majoré.

III. Soient X et Y deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x \in X$ tel que, pour tout $y \in Y$, on ait $x \leq y$.**1) X est majoré**

Faux Contre exemple : $X = \mathbb{R}$ et $Y = [0, 1]$; par exemple $x = 0$.

2) Y est minoré.

Vrai L'élément x est un minorant de Y .

3) Si X a une borne supérieure M et Y une borne inférieure m , celles ci vérifient $M \leq m$.

Faux Contre exemple : $X = Y = \{0, 1\}$ pour lesquels $M = 1$ et $m = 0$.

IV. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.**1) On suppose que $f(\mathbb{R})$ est majorée. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'ensemble $f([-n, n])$ est majoré.**

Comme $[-n, n] \subset \mathbb{R}$ on a $f([-n, n]) \subseteq f(\mathbb{R})$. Tout majorant de $f(\mathbb{R})$ est un majorant de $f([-n, n])$; un tel majorant existe par hypothèse donc $f([-n, n])$ est majoré.

2) On suppose encore que $f(\mathbb{R})$ est majorée. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n la borne supérieure de $f([-n, n])$. Montrer que l'ensemble $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.

Soit m un majorant de $f(\mathbb{R})$; d'après le raisonnement précédant c'est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un majorant de $f([-n, n])$ donc il vérifie $m \geq b_n$. Autrement dit m est un majorant de B . Donc l'ensemble B est majoré.

3) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f([-n, n])$ est majoré et que l'ensemble B , défini ci dessus, est majoré. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est majoré.

Soit m un majorant de B . Montrons que m est un majorant de $f(\mathbb{R})$:

Soit $y \in f(\mathbb{R})$. Par définition il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe un entier naturel n tel que $|x| \leq n$, d'où $x \in [-n, n]$ et $y \in f([-n, n])$ d'où $y \leq b_n$. Or $b_n \leq m$ donc on a $y \leq m$ et m est un majorant de $f(\mathbb{R})$. En conclusion $f(\mathbb{R})$ est majoré.

Contrôle du 26 octobre 2005

Sujet

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits

Barème indicatif et sans engagement : 4, 10, 6

I. Donner les voisinages de $+\infty$.

II. Pour chacune des questions suivantes répondre << Vrai >> ou << Faux >> sans justifier la réponse (2 points par réponse correcte, -2 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention) :

1) On suppose que pour tout x , $g(x) = f(x^2)$.

Si f a une limite en $+\infty$ alors g a une limite en $+\infty$

Vrai Faux

Si f a une limite en $-\infty$ alors g a une limite en $-\infty$

Vrai Faux

2) On suppose a accessible par D et $\lim_a f = L$.

Si l'image par f d'un rationnel est un rationnel, alors L est rationnel.

Vrai Faux

f est bornée sur $[a - 0.001, a + 0.001]$

Vrai Faux

3) On suppose que f a une limite en x_0 et que g a une limite en $-x_0$, alors $f + g$ a une limite en 0.

Vrai Faux

III. On suppose que pour tout x , $g(x) = f(2x) - f(x)$ et que la fonction f a une limite finie en $+\infty$.

Montrer que $\lim_{+\infty} g = 0$.

Corrigé

I. 1) Donner les voisinages de $+\infty$.

$\mathbb{R},]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Remarque : Les voisinages d'un point b définis dans le cours sont les intervalles ouverts contenant ce point si $b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R},]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{R},]-\infty, a[$ pour $a \in \mathbb{R}$) pour $b = +\infty$ (resp $b = -\infty$). On désigne plus généralement comme voisinage d'un point tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de ce point au sens précédant.

II. 1) On suppose que pour tout x , $g(x) = f(x^2)$.

Si f a une limite en $+\infty$ alors g a une limite en $+\infty$

Vrai Lorsque x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ donc la propriété est vraie d'après le théorème sur les limites de fonctions composées.

Si f a une limite en $-\infty$, alors g a une limite en $-\infty$.

Faux Contre-exemple : La fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f(x) = \sin(x)$ pour $x \geq 0$, ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x^2)$.

2) On suppose a accessible par D et $\lim_a f = L$

Si l'image par f d'un rationnel est un rationnel, alors L est rationnel.

Faux Contre-exemple $a = \pi$, $D = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$.

f est bornée sur $[a - 0.001, a + 0.001]$

Faux Contre-exemple $f(x) = \frac{1}{x - 0,0005}$ avec $D = \mathbb{R} - 0,0005$.

3) On suppose que f a une limite en x_0 et que g a une limite en $-x_0$, alors $f + g$ a une limite en 0.

Faux Contre-exemple : $f(x) = 1/x$, $g(x) = 0$, $D = \mathbb{R} - \{0\}$ et $x_0 = 1$ (ou n'importe quel nombre différent de 0).

III . On suppose que, pour tout x , $g(x) = f(2x) - f(x)$ et que la fonction f a une limite finie en $+\infty$.

Montrer que $\lim_{+\infty} g = 0$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $2x$ tend vers $+\infty$. Soit l la limite de f en $+\infty$. D'après le théorème sur le composé des limites $f(2x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ donc, d'après le théorème sur la somme des limites $g(x) = f(2x) - f(x)$ tend vers $l - l = 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Contrôle continu du 23 novembre 2005

Sujet

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits

Barème indicatif et sans engagement : 5, 10, 5

I. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \cos x$. On considère l'équation

$$f(x) = 0$$

1) Donner les signes de $f(0)$ et de $f(1)$. En déduire que cette équation a une solution comprise entre 0 et 1.

2) Montrer que cette solution est unique dans $[0, 1]$

3) L'équation a-t-elle des solutions supérieures à 1 ou inférieures 0 ?

II. Pour chacune des questions suivantes répondre <<Vrai >> ou << Faux >> sans justifier la réponse (2 points par réponse correcte, -2 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention) :

T.S.V.P.

- 1) Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. On suppose $f > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel f est décroissante. Vrai Faux
- 2) Soient f et g deux fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Alors
- i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(l)}{\ln(m)}$ Vrai Faux
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)-g(x)} = e^{l-m}$ Vrai Faux
- 3) Si la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée sur le segment $[a, b]$. Vrai Faux
- 4) Si la fonction f est continue sur l'intervalle $]a, b]$ elle est majorée sur l'intervalle $]a, b]$. Vrai Faux

III. 1) Sachant que $\ln(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, montrer, en utilisant la propriété $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, que $\ln(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{x(\ln(x+1) - \ln(x))}$.
En admettant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Corrigé

I. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \cos x$. On considère l'équation

$$f(x) = 0$$

1) Donner les signes de $f(0)$

On a $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$.

et de $f(1)$.

$f(1) = 1 - \cos(1) > 0$ car $0 < 1 < \pi/2$ donc, la fonction cosinus étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, $0 = \cos(\pi/2) < \cos(1) < \cos(0) = 1$.

En déduire que cette équation a une solution comprise entre 0 et 1.

Comme somme de fonctions continues f est continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires toutes les valeurs entre $f(0)$ et $f(1)$ sont atteintes donc il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = 0$, c'est à dire que l'équation $f(x) = 0$ a une solution comprise entre 0 et 1.

2) Montrer que cette solution est unique dans $[0, 1]$.

Sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$ la fonction $-\cos$ est strictement croissante ; comme somme de fonctions strictement croissantes, la fonction f est strictement croissante donc l'équation n'a qu'une solution dans $[0, 1]$.

3) L'équation a-t-elle des solutions supérieures à 1 ?

Pour $x > 1$ on a $f(x) > 1 - 1 = 0$ donc l'équation n'a pas de solution supérieure à 1.

ou inférieures à 0 ?

De même pour $x \leq -1$ on a $f(x) < 0$ donc il n'y a pas de solution inférieure ou égale -1 . Pour $-1 \leq x \leq 0$ on a $\cos(x) > 0$ donc $x - \cos(x) < 0$ et il n'y a pas non plus de solution. La solution dans $[0, 1]$ est donc la seule.

II. 1) Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. On suppose $f > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel f est décroissante.

Faux Contre-exemple : $f(x) = \frac{1 + \sin^2(x)}{x^2 + 1}$.

2) Soient f et g deux fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Alors

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(l)}{\ln(m)}$

Faux Prenons $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + (x - a)^2$. L'égalité ci dessus n'a pas de sens.

ii) $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)-g(x)} = e^{l-m}$

Vrai Cette égalité résulte des théorèmes sur les limites de sommes, produits et composés de fonctions.

3) Si la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée sur le segment $[a, b]$.

Vrai C'est un théorème du cours.

4) Si la fonction f est continue sur l'intervalle $]a, b]$ elle est majorée sur l'intervalle $]a, b]$.

Faux Contre exemple $]a, b] =]0, 1]$ et $f(x) = 1/x$.

III. 1) Sachant que $\ln(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, montrer, en utilisant la propriété $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, que $\ln(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$.

N'oublions pas que $\ln(x)$ est défini pour $x > 0$. Nous avons, d'après la propriété ci-dessus,

$$\ln(x) + \ln(1/x) = \ln(x(1/x)) = \ln(1) = 0$$

donc $\ln(x) = -\ln(1/x)$. Comme x est positif $1/x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 donc $\ln(1/x)$ tend vers $+\infty$ et $\ln(x) = -\ln(1/x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{x(\ln(x+1) - \ln(x))}$.

En admettant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(2x) - \sin(x)| \leq |\sin(2x)| + |\sin(x)|$ donc, d'après l'inégalité indiquée, $|\sin(2x) - \sin(x)| \leq 3|x|$. D'où, pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| \leq \frac{3}{|\ln(x+1) - \ln(x)|}$.

Par ailleurs $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln((x+1)/x) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(1 + 1/x)$ d'où

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|\ln(1 + 1/x)|}.$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures $1 + 1/x$ tend vers $+\infty$ donc $\ln(1 + 1/x)$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{\ln(1 + 1/x)}$ tend vers 0 donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$