

LICENCE

B05 : Polynômes, fractions rationnelles et séries formelles

Examen – 10 Mai 2006

2 heures. Ni document, ni calculatrice

Les quatre exercices sont indépendants

Question de cours.

Quelles sont les séries formelles inversibles dans $\mathbb{K}[[X]]$?

Ce sont les séries formelles dont le terme constant est non nul (les $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ avec $a_0 \neq 0$).

Exercice 1.

1) *Vérifier que les polynômes $A = X^3 + X^2 - 4X + 4$ et $B = (X - 1)^2$ sont premiers entre eux, et trouver une identité de Bezout entre A et B .*

Appliquons l'algorithme d'Euclide. La division euclidienne de A par B donne $A = (X + 3)B + X + 1$. La division euclidienne de B par le reste obtenu $X + 1$ donne $B = (X - 3)(X + 1) + 4$. Comme le reste trouvé ici est une constante non nulle, A et B sont premiers entre eux. On aurait pu le voir tout de suite: comme 1 n'est pas racine de A , les polynômes A et $(X - 1)^2$ ne peuvent pas avoir de facteur irréductible commun. Mais l'algorithme d'Euclide permet d'obtenir une identité de Bezout, en "remontant les divisions":

$$4 = B - (X - 3)(X + 1) = B - (X - 3)(A - (X + 3)B) = -(X - 3)A + (X^2 - 8)B$$

d'où

$$\left(-\frac{1}{4}X + \frac{3}{4}\right)A + \left(\frac{1}{4}X^2 - 2\right)B = 1.$$

2) *Trouver un polynôme de degré 4 dont le reste dans la division par A est 3 et dont le reste dans la division par B est -1 .*

On cherche un polynôme P de degré 4 vérifiant $P = AQ_1 + 3$ et $P = BQ_2 - 1$; on doit avoir $\deg(Q_1) = 1$ et $\deg(Q_2) = 2$. En soustrayant les deux écritures de P , on obtient $AQ_1 + 3 - (BQ_2 - 1) = 0$, soit $4 = -AQ_1 + BQ_2$. En comparant avec l'égalité $4 = -(X - 3)A + (X^2 - 8)B$ obtenue à la première question, on voit que le polynôme

$$P = (X - 3)A + 3 = (X^2 - 8)B - 1 = X^4 - 2X^3 - 7X^2 + 16X - 9$$

convient.

On aurait pu aussi procéder ainsi, sans utiliser l'identité de Bezout: on cherche

$$P = (aX + b)A + 3 = aX^4 + (a + b)X^3 + (b - 4a)X^2 + (4a - 4b)X + 4b + 3,$$

avec en plus la condition que $(X - 1)^2$ divise $P + 1$, ce qui équivaut à $P(1) + 1 = 0$ et $P'(1) = 0$. Ces deux conditions donnent les équations $2(a + b) + 4 = 0$ et $3a + b = 0$. Donc $a = 1$ et $b = -3$, ce qui fait $P = (X - 3)A + 3$, comme ce qu'on a trouvé ci-dessus.

Exercice 2.

On sait les choses suivantes sur le polynôme P : c'est un polynôme unitaire à coefficients réels de degré 8, son terme constant est 21:

$$P = X^8 + \text{? ? ?} + 21 ,$$

1 est racine triple de P , 2 est racine double, $-1/2$ et 3 sont racines simples.

Quelle est la huitième racine de P ? Quel est le coefficient de X^7 dans P ?

Appelons a la huitième racine de P . Puisque P est unitaire et que son degré est pair, on sait que le terme constant de P est le produit de ses huit racines (comptées avec multiplicité). Ainsi

$$21 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 \times a ,$$

d'où $a = -\frac{7}{2}$. Le coefficient de X^7 dans P est l'opposé de la somme des huit racines comptées avec multiplicité. C'est donc

$$-(1 + 1 + 1 + 2 + 2 - \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{2}) = -6 .$$

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle

$$\frac{4}{(X^2 + 1)(X - 1)^3} .$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est de la forme

$$\frac{4}{(X^2 + 1)(X - 1)^3} = \frac{a}{(X - 1)^3} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X - 1} + \frac{dX + e}{X^2 + 1} ,$$

où $a, b, \dots, e$ sont des constantes réelles. On peut déterminer d et e en multipliant par $X^2 + 1$ et en faisant $X = i$. Ceci donne:

$$di + e = \frac{4}{(i - 1)^3} = \frac{4(-i - 1)^3}{2^3} = -\frac{1 + 3i + 3i^2 + i^3}{2} = 1 - i ,$$

d'où $e = 1$ et $d = -1$. Pour déterminer la partie polaire relative au pôle 1, on peut faire le changement de variable $Y = X - 1$ et faire la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 4 par $(Y + 1)^1 + 1 = 2 + 2Y + Y^2$. Le quotient trouvé est $2 - 2Y + Y^2$, et donc $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$. Finalement:

$$\frac{4}{(X^2 + 1)(X - 1)^3} = \frac{2}{(X - 1)^3} - \frac{2}{(X - 1)^2} + \frac{1}{X - 1} + \frac{-X + 1}{X^2 + 1} .$$

On peut faire quelques vérifications. pour $X = 0$, on obtient bien -4 des deux côtés. Si on multiplie par X et qu'on prend la limite en $+\infty$, on obtient bien 0 des deux côtés.

On aurait pu éviter la division suivant les puissances croissantes de la manière suivante: déterminer a en multipliant par $(X - 1)^3$ et en faisant $X = 1$, puis déterminer b et c par les deux procédés utilisés ci-dessus pour la vérification.

Pour achever la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, il reste à calculer la décomposition

$$\frac{-X+1}{X^2+1} = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\bar{\alpha}}{X+i},$$

où α est un nombre complexe. Puisque i est pôle simple, on peut utiliser la dérivée du dénominateur:

$$\alpha = \frac{-i+1}{2i} = \frac{-1-i}{2}.$$

Finalement:

$$\frac{4}{(X^2+1)(X-1)^3} = \frac{2}{(X-1)^3} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} - \frac{1+i}{2(X-i)} - \frac{1-i}{2(X+i)}.$$

Exercice 4.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^2 + X - 1}{(X-1)^2(2X-1)}.$$

Développer F en série formelle.

On calcule d'abord la décomposition en éléments simples

$$F = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{2X-1}.$$

En multipliant par $(X-1)^2$ puis en faisant $X = 1$ on obtient $a = 1$. En multipliant par $2X-1$ puis en faisant $X = \frac{1}{2}$ on obtient $c = -1$. Enfin, en faisant $X = 0$, on obtient $1 = 1 - b + 1$, d'où $b = 1$. Finalement

$$F = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2X-1}.$$

On peut maintenant développer en série formelle chacun des éléments simples. On a

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^n + \dots = \sum_{n \geq 0} X^n,$$

$$\frac{1}{1-2X} = 1 + 2X + 4X^2 + \dots + 2^n X^n + \dots = \sum_{n \geq 0} 2^n X^n,$$

$$\frac{1}{(1-X)^2} = 1 + 2X + 3X^2 + \dots + (n+1)X^n + \dots = \sum_{n \geq 0} (n+1)X^n.$$

Le dernier développement s'obtient par exemple en dérivant le développement de $\frac{1}{1-X}$. En regroupant tout ceci, on a:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{(1-X)^2} - \frac{1}{1-X} + \frac{1}{1-2X} \\ &= \sum_{n \geq 0} ((n+1) - 1 + 2^n) X^n = \sum_{n \geq 0} (n + 2^n) X^n. \end{aligned}$$