

Examen terminal du 10/05/2006, durée 2h

L'épreuve se compose de 5 exercices indépendants.

Les réponses doivent être rédigées après chaque question et, si nécessaire, au verso.

Aucun document n'est autorisé.

Chaque exercice est noté sur un nombre de points à peu près égaux.

Exercice 1 1) Décrire une expérience de tirage de boules dans une urne et une v.a.r. X définie pour cette expérience qui suit une loi Binômiale $\mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$. Expliciter la loi de X (valeurs prises par X et formule pour la probabilité que X prenne ces valeurs).

2) Même question pour une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(15, 20, 40)$.

Solution

1) On tire avec remise 10 boules dans une urne composée de 25 boules rouges et 75 boules bleues. X est la v.a.r. qui prend comme valeur le nombre de boules rouges tirées :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}, \quad k \in \{0, \dots, 10\}.$$

2) On tire 15 boules sans remise (ou simultanément) dans une urne composée de 10 boules rouges et 40 boules bleues. X est la v.a.r. qui prend comme valeur le nombre de boules rouges tirées :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{20}{k} \binom{40}{15-k}}{\binom{60}{15}}, \quad k \in \{0, \dots, 15\}.$$

Exercice 2 (Les résultats sont donnés sous forme de fractions rationnelles).

On tire un jeton dans une boîte qui est composée de 12 jetons, dont 2 (respectivement 4, 6) qui portent le numéro 1 (respectivement 2, 3). Si le jeton tiré porte le numéro 1 (respectivement 2, 3) on tire une boule dans une première (respectivement deuxième, troisième) urne qui est composée de 5 (respectivement 15, 10) boules noires et 5 (respectivement 5, 50) boules blanches. On note par U_i , $i = 1, 2, 3$ l'événement de tirer une boule dans la i -ième urne et par N (respectivement B) l'événement de tirer une boule noire (respectivement blanche).

1. Déterminer $\mathbb{P}(U_i)$ et $\mathbb{P}_{U_i}(N)$, $i = 1, 2, 3$.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ? une boule blanche ?
3. Si la boule tirée était noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ?
4. Si la boule tirée était blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ?

Solution

- 1) $\mathbb{P}(U_1) = 1/6$, $\mathbb{P}(U_2) = 1/3$, $\mathbb{P}(U_3) = 1/2$, $\mathbb{P}_{U_1}(N) = 1/2$, $\mathbb{P}_{U_2}(N) = 3/4$, $\mathbb{P}_{U_3}(N) = 1/6$.
- 2) $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}_{U_1}(N) \times \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}_{U_2}(N) \times \mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}_{U_3}(N) \times \mathbb{P}(U_3) = 5/12$. $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(N) = 7/12$.
- 3) $\mathbb{P}_N(U_1) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap N)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\mathbb{P}_{U_1}(N) \times \mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(N)} = 1/5$.
- 4) $\mathbb{P}_B(U_1) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{U_1}(B) \times \mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(B)} = 1/7$.

Exercice 3 (Les résultats sont donnés sous forme de fractions rationnelles).

La loi de probabilité d'un couple de v.a.r. (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	p	$2p$	p
0	p	p	0
1	$2p$	$3p$	p

où $p \in \mathbb{R}$ est un nombre réel.

- 1) Déterminer p .
- 2) Déterminer la loi marginale de X et de Y .
- 3) Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Cov}(X, Y)$. Que peut-on en déduire sur l'indépendance de X et de Y ?
- 4) Déterminer la loi de la v.a.r. $M = \max(X, Y)$.

Solution

- 1) La somme des probabilités dans le tableau est $12p$, donc $p = 1/12$.

2)

$X \setminus Y$	-1	0	1	loi de X
-1	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
0	$1/12$	$1/12$	0	$1/6$
1	$1/6$	$1/4$	$1/12$	$1/2$
loi de Y	$1/3$	$1/2$	$1/6$	1

3) $\mathbb{E}(X) = 1/6$, $\mathbb{E}(Y) = -1/6$, $\mathbb{E}(XY) = -1/12$, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y) = -1/18$.
 $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4) $\mathbb{P}(M = -1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = 1/12$; $\mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/3$; $\mathbb{P}(M = 1) = 1 - 1/12 - 1/3 = 7/12$.

Exercice 4 Soient $n = 1000$ et $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathbb{P})$ de même loi d'espérance 2 et de variance 1. On pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $\mathbb{P}(|Y_n - 2| \geq \frac{1}{4})$.
3. Minorer $\mathbb{P}(1.9 < Y_n < 2.1)$.
4. Où avez-vous utilisé l'indépendance des v.a.r. $X_1, \dots, X_n$?

Solution

1) $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times 2 = 2$.

$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{V}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(\sum_{i=1}^n X_i) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times 1 = \frac{1}{n}$. (i) : on a utilisé l'indépendance des v.a.r. $X_1, \dots, X_n$.

2) $\mathbb{P}(|Y_n - 2| \geq \frac{1}{4}) = \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \frac{1}{4}) \stackrel{(ii)}{\leq} \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{(\frac{1}{4})^2} = \frac{16}{1000} = 0.016$.

3) $\mathbb{P}(1.9 < Y_n < 2.1) = \mathbb{P}(|Y_n - 2| < 0.1) = \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| < 0.1) = 1 - \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq 0.1) \stackrel{(ii)}{\geq} 1 - \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{(\frac{1}{10})^2} = \frac{9}{10} = 0.9$. (ii) : on a utilisé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4) Question 1) (i).

Exercice 5 (On donnera les résultats sous forme décimale avec deux chiffres décimaux).

Une agence immobilière a étudié les appartements qu'elle a mis en location durant l'année 2005. Elle considère le caractère *loyer* de l'ensemble de ces appartements. Elle a regroupé les loyers en tranches de 100 Euros et a déterminé le nombre (l'effectif) d'appartements dans chaque tranche :

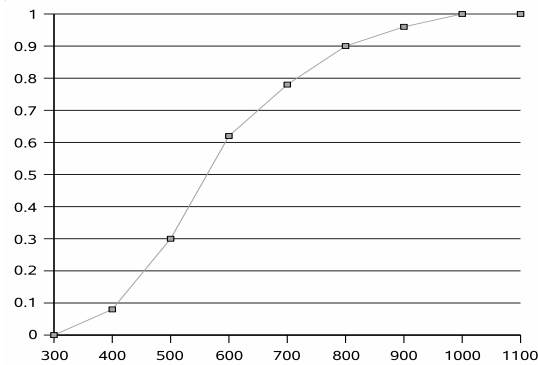
loyer	[300, 400[	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[	[800, 900[	[900, 1000[
effectifs	4	11	16	8	6	3	2
fréquences							
fréquences cumulées							

- 1) Compléter le tableau en calculant les fréquences et les fréquences cumulées.
- 2) Établir le polygone des fréquences cumulées du caractère x .
- 3) Utiliser le polygone des fréquences cumulées pour déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane (faites une construction graphique et pas un calcul).
- 4) Déterminer la moyenne et l'écart-type du caractère x en explicitant la formule que vous utilisez.

Solution

	loyer	[300, 400[	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[	[800, 900[	[900, 1000[
1)	effectifs	4	11	16	8	6	3	2
	fréquences	0.08	0.22	0.32	0.16	0.12	0.06	0.04
	fréquences cumulées	0.08	0.3	0.62	0.78	0.9	0.96	1

- 2) Le polygone des fréquences cumulées est



(Remarque : j'ai adopté la même convention qu'au cours pour le polygone des fréquences cumulées : on suppose que la distribution dans chaque classe est uniforme, donc aucun loyer est inférieur à 300 et 4 loyers sont inférieurs ou égaux à 4... On obtient donc l'analogue de la fonction de répartition. Une autre convention (que j'ai mentionnée au cours) est de remplacer chaque classe par son centre et donc de dire qu'il y a 4 loyers de 350... J'ai accepté les deux conventions.)

3) La droite d'équation $y = 0.5$ coupe le polygone en un point $M(M_e, 0.5)$. M_e est l'intersection de la droite qui est parallèle à l'axe des y et qui passe par le point $M(M_e, 0.5)$. On voit que la médiane est un peu à droite du milieu de l'intervalle $[500, 600]$, donc on pourrait prendre $M_e \sim 550$ (ou $M_e \sim 560$). (Pour être plus précis, 0.5 est à peu près à deux tiers de l'intervalle $[0.3, 0.62]$, donc M_e se trouve à peu près à deux tiers de l'intervalle $[500, 600]$, donc $M_e \sim 566.6 \sim 567$. Le calcul exact donne 562.5. Si on adopte la deuxième convention pour le polygone des fréquences cumulées on obtient $M_e \sim 510$.)

4) Les centres des intervalles sont $x_i = 350 + (i - 1) \times 100$, $i = 1, \dots, 7$. L'effectif total est $N = 50$. La moyenne est $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i \times n_i = 586$. La variance est $s^2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2 \times n_i - (\bar{x})^2 = 22304$, donc l'écart type est $\sqrt{22304} \sim 149.35$.