

Intégration et probabilités

Contrôle continu 3 – Corrigé

Exercice 1.

1. La mesure $\Gamma(1)$ admet une densité proportionnelle à $x \mapsto e^{-x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ qui est la densité de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma_1 = \mathcal{E}(1)$.
2. Pour $p \geq 1$, on a, grâce à une intégration par parties,

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{p-1}}_u \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = [-x^{p-1}e^{-x}]_0^{+\infty} + (p-1) \int_0^{+\infty} x^{p-2}e^{-x} dx = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a immédiatement par récurrence, puisque $\Gamma(1) = 1$, que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Soit h borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors en effectuant le changement de variables $(u, v) = (x + y, y)$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X+Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x+y)f(x)g(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} h(u)f(u-v)g(v) du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u) \left(\int_{\mathbb{R}} f(u-v)g(v) dv \right) du = \int_{\mathbb{R}} h(u)f * g(u) du, \end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini. La fonction $f * g$ est donc bien la densité de la loi de $X + Y$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \gamma_p * \gamma_q(x) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_{\mathbb{R}} (x-y)^{p-1} e^{-(x-y)} \mathbf{1}_{\{x-y>0\}} y^{q-1} e^{-y} \mathbf{1}_{\{y>0\}} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-x} \int_{\mathbb{R}} (x-y)^{p-1} y^{q-1} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}} dy. \end{aligned}$$

Si $x \leq 0$ alors $\gamma_p * \gamma_q(x) = 0$. Si $x > 0$, le changement de variables $y = xu$ (avec x fixé) assure que

$$\gamma_p * \gamma_q(x) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \left(\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du \right) x^{p+q-1} e^{-x}.$$

Ainsi, la densité de probabilité $\gamma_p * \gamma_q(x)$ est proportionnelle à γ_{p+q} . Elles sont donc égales puisqu'elles sont toutes les deux de masse 1 et

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

5. La loi de X_1 est Γ_1 . Supposons que la loi de $X_1 + \dots + X_n$ soit Γ_n . Alors la loi de $X_1 + \dots + X_{n+1}$ est la mesure de densité $\gamma_n * \gamma_1$ puisque $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $X_1 + \dots + X_n$ est Γ_n .

Exercice 2.

1. La variable aléatoire X^2 est positive ou nulle donc son espérance est nulle si et seulement si X^2 (ou encore X) est nulle presque sûrement.

2. La fonction

$$\lambda \mapsto \mathbb{E}[(X + \lambda Y)^2] = \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda \mathbb{E}(XY) + \lambda^2 \mathbb{E}(Y^2)$$

est un trinôme du second degré toujours positif donc son discriminant (réduit) est négatif :

$$\mathbb{E}(XY)^2 - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leq 0,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

3. Puisque $X \geq 0$, on peut écrire

$$\mathbf{1}_{[\alpha \mathbb{E}(X), +\infty[}(X) = 1 - \mathbf{1}_{[0, \alpha \mathbb{E}(X)[}(X).$$

Ainsi, puisque $X \mathbf{1}_{[0, \alpha \mathbb{E}(X)[}(X) \leq \alpha \mathbb{E}(X)$,

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[\alpha \mathbb{E}(X), +\infty[}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[0, \alpha \mathbb{E}(X)[}(X)) \geq (1 - \alpha) \mathbb{E}(X).$$

4. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[\alpha \mathbb{E}(X), +\infty[}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[\alpha \mathbb{E}(X), +\infty[}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) \mathbb{P}(X \geq \alpha \mathbb{E}(X)),$$

d'où la minoration souhaitée.