

Intégration et probabilités

Contrôle continu 1 – Corrigé

Question de cours. (6 pts)

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesuré. On dit qu'une application μ de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure si

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$. Posons $A_0 = B_0$ et $A_n = B_n \setminus B_{n-1} \in \mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$. Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et, pour tout $n \geq 0$, $B_n = \cup_{k=0}^n A_k$. Il en résulte que

$$\mu(\cup_{n=0}^{\infty} B_n) = \mu(\cup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n),$$

Exercice 1. (16 pts)

1. Puisque f est mesurable, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ et ainsi, $\mu(f^{-1}(B))$ a bien un sens (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). Comme $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, on a bien $\mu_f(\emptyset) = 0$. Soit à présent $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints d'éléments de $\mathcal{B}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = f^{-1}(B_n)$. Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ et ainsi,

$$\mu_f(\cup_n B_n) = \mu(f^{-1}(\cup_n B_n)) \stackrel{*}{=} \mu(\cup_n f^{-1}(B_n)) = \mu(\cup_n A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_f(B_n),$$

où l'égalité $*$ vient du fait que l'image réciproque d'une réunion est égale à la réunion des images réciproques.

De plus, $\mu_f(F) = \mu(f^{-1}(F)) = \mu(E)$. Ainsi, si μ est une mesure de probabilité, il en est de même pour μ_f .

2. La fonction F_μ est donc strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] \lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x) [$. Déterminons ces limites.
Soit $A_n =]-\infty, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui converge vers $\mathbb{R}$ donc

$$\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(\mathbb{R}) = 1 \quad \text{ou encore,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\mu(n) = 1.$$

Puisque F_μ est croissante,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_\mu(n) = 1.$$

De même, soit $B_n =]-\infty, -n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui converge vers $\emptyset$ telle que $\mu(B_0) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Ainsi,

$$\mu(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{ou encore,} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} F_\mu(n) = 0.$$

Puisque F_μ est croissante,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} F_\mu(n) = 0.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $F_\mu(x) \in]0, 1[$ et donc

$$\eta([-\infty, F_\mu(x)]) = F_\eta(F_\mu(x)) = F_\mu(x).$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par croissance de F_μ ,

$$\eta([-\infty, F_\mu(x)]) = \eta(F_\mu([-\infty, x])).$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_\mu(x) = \eta(F_\mu([-\infty, x])) = \eta_{F_\mu^{-1}}([-\infty, x]) = F_{\eta_{F_\mu^{-1}}}(x).$$

Puisque $F_\mu = F_\nu$ implique $\mu = \nu$, c'est que $\mu = \eta_{F_\mu^{-1}} : \mu$ est la mesure image de η par F_μ^{-1} .

5. On a, par un calcul direct,

$$\nu([-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

6. Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 - p, \\ 1 & \text{si } x > 1 - p. \end{cases}$$

Alors, on vérifie aisément que $\eta_f = \nu$.

Cependant, il n'y a pas du tout unicité de f : soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\eta(A) = p$. Alors la mesure image de η par $\mathbf{1}_A$ est ν .

La réciproque est fautive puisque pour toute fonction f ,

$$\nu_f(\{f(0), f(1)\}) = 1, \quad \text{ou encore} \quad \nu_f(\{f(0), f(1)\}^c) = 0.$$

Ceci signifie que toute mesure image de ν ne peut ■charger■ que deux points au plus.

Exercice 2. (5 pts)

1. Puisque f est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$. Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, c'est que pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \leq n$. Ainsi, la réunion des ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est E tout entier. Enfin, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(E) > 0.$$

Ceci assure qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\mu(A_n) > \mu(E)/2 > 0.$$

En particulier, $\mu(A_{n_0}) > 0$ et pour tout $x \in A_{n_0}$, $f(x) \leq n_0$.

2. On raisonne de même en introduisant la suite croissante $(B_n)_n$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \{f \geq 1/n\}$. La réunion de ces ensembles est A qui est de mesure strictement positive dont il en est de même pour les ensembles $(B_n)_n$ pour n assez grand.