

L3 - Biologie générale - PCMa : Mathématiques

Examen terminal : corrigé
mai 2006 - Durée : 2 heures

Exercice 1.

1. Les triangles ACB et ADB sont inscrits dans le cercle de diamètre $[AB]$. Comme l'un de leur côté est le diamètre du cercle, ce sont des triangles rectangles.
2. On considère le triangle AEF . Dans ce triangle (CF) est la hauteur issue du sommet F , (ED) est la hauteur issue du sommet E et ces deux droites se coupent en B . Comme les hauteurs d'un triangle sont concourantes, le point B est donc l'orthocentre et la hauteur issue de A passe par ce point. Ainsi (AB) est cette hauteur et donc (EF) est perpendiculaire à (AB) .

Exercice 2.

Premier raisonnement : Faux. On ne sait pas si les gens avec instruction sont superficiels ou non.
Deuxième raisonnement : Vrai.

Exercice 3. Si on appelle x le nombre d'hectares, on a un système d'équations traduisant la location des terres pour chaque année.

$$\begin{cases} 80 + 0,75n = 7x \\ 80 + n = 8x \end{cases}$$

La deuxième équation donne : $n = 8x - 80$, donc par substitution, la première devient

$$80 + 0,75(8x - 80) = 7x$$

En la résolvant, on obtient $x = 20$.

Exercice 4.

1. On a $\frac{37 \times 50}{23} = 80,43$. Il peut donc afficher 80 grammes.
2. (a) $37x + 23y = 2860$
(b) On a $\text{PGCD}(37, 23) = 1$ et 1 divise n'importe quel nombre.
(c) On a le tableau suivant pour l'algorithme d'Euclide :

q	r	u	v
	37	1	0
	23	0	1
1	14	1	-1
1	9	-1	2
1	5	2	-3
1	4	-3	5
	1	5	-8

On trouve $u = 5$ et $v = -8$.

- (d) On a une solution particulière : $x_0 = 5 \times 2860 = 14\,300$ et $y_0 = -8 \times 2860 = -22\,880$
- (e) La solution générale est

$$x = 14\,300 - 23k \text{ et } y = -22\,880 + 37k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On vérifie : $37(14\,300 - 23k) + 23(-22\,880 + 37k) = 37x_0 + 23y_0 = 2860$

- (f) Les nombres de paquets doivent être positifs, les solutions valables pour le commerçant sont données par les valeurs de k vérifiant les inégalités :

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

soit

$$14\,300 \geq 23k \text{ et } 37k \geq 22\,880$$

d'où

$$\frac{14\,300}{23} \geq k \geq \frac{22\,880}{37}$$

On trouve trois solutions possibles :

- pour $k = 619$, on a $x = 63$ et $y = 23$
- pour $k = 620$, on a $x = 40$ et $y = 60$
- pour $k = 621$ on a $x = 17$ et $y = 97$

Exercice 5.

1. On a $2880 = 2^6 \times 3^2 \times 5$
2. Le nombre de diviseurs est $(6+1)(2+1)(1+1) = 42$
3. Un nombre est un carré dans $\mathbb{N}$ si et seulement si sa décomposition en facteurs premiers a tous ses exposants pairs.
Le plus petit multiple de 2880 qui est un carré est $n = 5 \times 2880 = 14400$ et sa racine carrée est 120

Exercice 6. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Alors l'image par R de B est C et celle de M est N .

Comme l'image d'une droite par une rotation est une droite, l'image de (BM) est (CN) .

Par une rotation d'angle θ , une droite et son image font un angle de mesure θ . Ainsi les droites (BM) et (CN) qui se coupent en C font un angle de $\frac{\pi}{3}$.

On a l'égalité des angles : $\widehat{ABC} = \widehat{BCN} = \frac{\pi}{3}$. Donc les droites (AB) et (CN) sont parallèles.

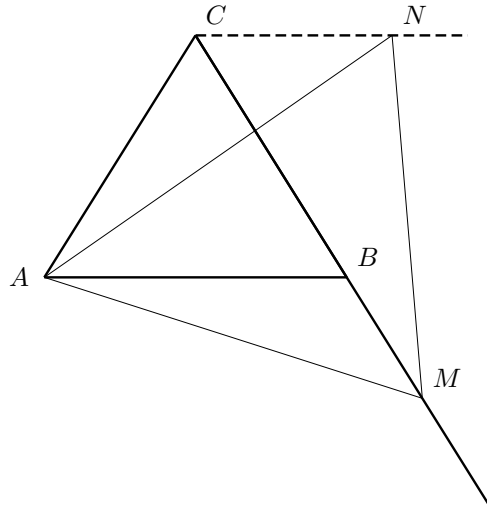


figure complétée