

Corrigé de l'examen de mai 2006

Exercice A

1. (a) Pour $a \leq s \leq t \leq b$,

$$\{X_{(1)} > s, X_{(n)} \leq t\} = \{\forall 1 \leq i \leq n, \quad s < X_i \leq t\}.$$

Sa probabilité vaut $\pi = \left(\frac{t-s}{b-a}\right)^n$.

- (b) On a

$$\pi = \left(\frac{t-s}{b-a}\right)^n = \int_{]s,b] \times [a,t]} g(x,y) dx dy = \int_s^b \int_a^t g(x,y) dx dy$$

- (c) Il est clair que le couple prend ses valeurs dans le domaine Δ indiqué.

En dérivant π par rapport aux bornes s, t de l'intégrale, i.e. $g(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \pi$, on obtient l'expression de g demandée.

2. Le changement de variable $\Phi : u = \frac{1}{2}(s+t), v = \frac{1}{2}(t-s)$ est linéaire *invertible*, de Jacobien constant $\frac{1}{2}$. L'application inverse est donnée par $\Phi^{-1} : s = u-v, t = u+v$. L'image D de Δ par Φ est

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq \frac{1}{2}(a+b), \quad a+v \leq u \leq b-v\},$$

région triangulaire de sommets $(a, 0)$, $(b, 0)$ et $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b))$ dans le plan (u, v) .

La densité du vecteur (U_n, V_n) est donc, pour $(u, v) \in D$,

$$g_2(u, v) = g(\Phi^{-1}(u, v)) |J_{\Phi^{-1}}(u, v)| = 2 \frac{n(n-1)}{(b-a)^n} (2v)^{n-2}.$$

3. En intégrant la densité précédente par rapport à du , on obtient la densité marginale de V_n qui vaut

$$2 \frac{n(n-1)}{(b-a)^n} (2v)^{n-2} (b-a-2v) \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}(a+b)]}(v).$$

La densité g de ξ_n en découle facilement.

4. On a

$$\mathbb{E}[(\xi_n - 1)^2] = \int_0^1 (u-1)^2 h(u) du = n(n-1) \frac{(n-2)! 3!}{(n+2)!} = \frac{6}{(n+1)(n+2)}.$$

5. Puisque, $X_{(n)} - X_{(1)} = 2V_n = (b-a)\xi_n$, $n^2 \mathbb{E}[(X_{(n)} - X_{(1)} - (b-a))^2] = n^2(b-a)^2 \mathbb{E}[(\xi_n - 1)^2]$ qui converge vers 6 quand $n \rightarrow \infty$. En particulier, $X_{(n)} - X_{(1)}$ converge en moyenne quadratique (L^2) vers $(b-a)$.

Notons $W_n = (X_{(n)} - X_{(1)}) - (b-a)$. C'est impossible que $\sqrt{n}W_n$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $\delta^2 > 0$. Car, d'après ce qui précède, $\mathbb{E}[(nW_n)^2] \rightarrow 6$. Donc $\sqrt{n}W_n$ tend vers zéro dans L^2 , ce qui est incompatible avec une convergence en loi vers une variable non dégénérée.

Autre argument (de circonstance ici) : on a $W_n \leq 0$, $\sqrt{n}W_n$ ne peut converger en loi vers une variable gaussienne dont le support est toute la droite.

Exercice B.

1. Soit $x \in E$ et pour deux indices i, j , notons τ_{ij} la transposition qui les échangent et $y = x \circ \tau_{ij}$ l'état donné dans le texte. Soit $A_x = \{y : \exists \{i, j\}, y = x \circ \tau_{ij}\}$. Ce sont les états auxquels mène $x : Q(x, y) > 0 \Leftrightarrow y \in A_x$.

Les proba : deux situations à distinguer : $y = x$ ou $y \neq x$. Soit $n_+ = \text{card}\{j : x_j = +1\}$ et $n_- = \text{card}\{j : x_j = -1\}$. Alors, il existe n_+n_- transpositions τ tels que $x \circ \tau \neq x$; le cas complémentaire a pour cardinal $\binom{n}{2} - n_+n_- = \binom{n_+}{2} + \binom{n_-}{2}$. Ainsi,

$$Q(x, y) = \frac{1}{\binom{n}{2}}, \quad y \in A_x, \quad y \neq x, \quad \text{et} \quad Q(x, x) = 1 - \frac{n_+n_-}{\binom{n}{2}}.$$

2. - La noyau Q est symétrique d'après ce qui précède.
- On remarque si $y \in A_x, \sum y_j = \sum x_j$: clairement Q est réductible sur E .
3. on a ici, pour tout $x \in E_0, n_+(x) = n_+(c)$ et $n_-(x) = n_-(c)$.
 - (a) Si $x \in E_0, A_x \subset E_0$, et $\sum_{y \in E_0} Q_0(x, y) = 1 : Q_0$ est un noyau de Markov bien défini (la positivité des proba est évidente).
 Q_0 hérite la symétrie de Q .
Irréductibilité de Q_0 : vu la remarque ci-dessus, pour $x, y \in E_0$, on a $n_+(x) = n_+(y)$ et $n_-(x) = n_-(y)$. En échangeant successivement les $+1$ d'abord, et les -1 ensuite, on trouve un chemin qui mène x à y .
 - (b) (voir le cours)
 - (c) Si x mène à un $y \neq x$ (si $y = x, \Delta = 0$!), forcément $y \in A_x$ et $y = x \circ \tau_{ij}$ pour deux indices i, j . Alors

$$\Delta = bx_i(y_{j-1} + y_{j+1} - x_{i-1} + x_{i+1}) + bx_j(y_{i-1} + y_{i+1} - x_{j-1} + x_{j+1}),$$
 où par covention, $x_0 = y_0 = x_{n+1} = y_{n+1} = 0$.
 - (d) La loi π_0 est partout positive, Q_0 symétrique et irréductible, d'après le cours, l'échantillonneur de Metropolis converge en loi vers π_0 .

Exercice C.

1. Vu en cours : conditionnellement à $N_t = k, k \geq 1$, la loi de $(T_1, \dots, T_{N_t})$ a la densité $k! \frac{1}{t^k} \mathbb{1}_{A_k}(x_1, \dots, x_k)$, avec $A_k = \{(x_i) \in \mathbb{R}^k : 0 < x_1 < \dots < x_k < t\}$.
D'où la formule demandée.

En l'appliquant à $\psi(x_1, \dots, x_k) = \phi(x_k)$, on a

$$\mathbb{E}[\phi(T_k) | N_t = k] = \int_{0 < x_1 < \dots < x_k < t} \frac{k!}{t^k} \phi(x_k) dx_1 \cdots dx_k.$$

Or, à $0 < x_k < t$ fixé,

$$\int_{0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k} dx_1 \cdots dx_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} x_k^{k-1}.$$

En injectant ce résultat dans l'intégrale ci-dessus, on trouve la formule demandée.

2. (a) Comme $0 < T_{N_t} \leq t$, D_t prend ses valeurs dans $[0, t[\cup\{t\}$. Ici on a isolé le point $\{t\}$ car D_t prend cette valeur avec une probabilité > 0 .
- (b) Sur $\{N_t = 0\}$, D_t vaut t . D'où : $\mathbb{E}[g(D_t)\mathbf{1}_{\{N_t=0\}} | N_t] = \mathbf{1}_{\{N_t=0\}} \mathbb{E}[g(D_t) | N_t] = \mathbf{1}_{\{N_t=0\}} g(t)$.
- (c) - Clairement $\mathbb{E}[g(D_t)\mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} | N_t = 0] = 0$.
 - Sur $\{N_t = k\}$ avec $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(D_t)\mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} | N_t = k] &= \mathbb{E}[g(t - T_k) | N_t = k] \\ &= \int_0^t \frac{k}{t} \left(\frac{x}{t}\right)^{k-1} g(t-x) dx \quad (\text{par la question 1}) \\ &= \int_0^t \frac{k}{t} \left(\frac{t-u}{t}\right)^{k-1} g(u) du. \end{aligned}$$

D'où la formule demandée.

- (d) En écrivant $g(D_t) = g(D_t)\mathbf{1}_{\{N_t=0\}} + g(D_t)\mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}}$, on trouve

$$\mathbb{E}[g(D_t) | N_t] = g(t)\mathbf{1}_{\{N_t=0\}} + \mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \int_0^t \frac{N_t}{t} \left(\frac{t-u}{t}\right)^{N_t-1} g(u) du.$$

Donc, puisque $N_t \sim \mathcal{P}(\theta t)$,

$$\mathbb{E}[g(D_t)] = g(t)e^{-\theta t} + \mathbb{E}\left\{\mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \int_0^t \frac{N_t}{t} \left(\frac{t-u}{t}\right)^{N_t-1} g(u) du\right\}$$

Pour la dernière double intégrale ($\mathbb{E}$ et $\int_0^t$), on utilise Fubini pour permuter les intégrations.

Justification : g est bornée, $|g(u)| \leq C$ pour tout u avec une constante $C \geq 0$. On a

$$\mathbb{E}\left|\mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \frac{N_t}{t} \left(\frac{t-u}{t}\right)^{N_t-1} g(u)\right| \leq C \sum_{k \geq 1} e^{-\theta t} \frac{k}{t} \left(\frac{t-u}{t}\right)^{k-1} \frac{(\theta t)^k}{k!} = C\theta e^{-\theta u},$$

et que $\int_0^t \theta e^{-\theta u} < \infty$.

Par Fubini donc, la double intégrale vaut $\int_0^t \theta e^{-\theta u} g(u) du$. Finalement, pour toute fonction g borélienne bornée,

$$\mathbb{E}[g(D_t)] = g(t)e^{-\theta t} + \int_0^t \theta e^{-\theta u} g(u) du.$$

Autrement dit, la loi de D_t est : $e^{-\theta t} \delta_{\{t\}}(du) + \theta e^{-\theta u} \mathbf{1}_{[0, t[}(u) du$, somme d'une masse de Dirac en t et d'une mesure absolument continue sur $[0, t[$ (restriction non normalisée de la loi exponentielle).

- (e) Quand $t \rightarrow \infty$, on a pour toute fonction g borélienne bornée ,

$$\mathbb{E}[g(D_t)] \rightarrow \int_0^\infty \theta e^{-\theta u} g(u) du.$$

Ceci étant vrai a fortiori pour g continue et bornée : D_t converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre θ (de support $[0, \infty[$).