

Université de Rennes 1, Master de Mathématiques, H07, Fonctions spéciales
Corrigé de l'examen final du 9 mai 2006

Exercice 1. 1.1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\text{Log } z = \int_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi}$. La formule $\text{Log}(z^2) = 2\text{Log } z$ est vraie pour $\text{Re } z > 0$ par prolongement analytique car vérifiée sur $\mathbb{R}_+$ et $z^2 \notin \mathbb{R}_-$ si $\text{Re } z > 0$. En revanche, elle est fausse pour $\text{Re } z \leq 0$, même si $z, z^2 \notin \mathbb{R}_-$: on a alors avec $\pi > |\theta| \geq \pi/2$, $|\text{Im}(\text{Log}(z^2))| < \pi$, $|\text{Im}(2\text{Log } z)| = 2|\theta| \geq \pi$.

1.2. Pour $\text{Re } s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$; ζ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle qui est simple et de résidu 1 en 1.

1.3. Pour $\text{Re } s > 1$, $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$.

1.4. Pour $\text{Re } z > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Γ a des pôles simples en $-k$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec un résidu égal à $(-1)^k/k!$. Pour tout $z \notin \mathbb{Z}_-$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Par suite

$$\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi}.$$

1.5. La forme quadratique $x^2 + xy + y^2$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$ car de matrice $\pi A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont strictement positives $(3/2, 1/2)$. Notons que

$$(\pi A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

La fonction f est donc dans la classe de Schwartz et l'on a $f(X) = e^{-\pi \langle AX, X \rangle}$

$$\widehat{f}(\Xi) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi \langle A^{-1}\Xi, \Xi \rangle} = \pi (\det(\pi A))^{-1/2} e^{-\pi^2 \langle (\pi A)^{-1}\Xi, \Xi \rangle} = \pi \left(\frac{3}{4}\right)^{-1/2} e^{-\pi^2 (\frac{4}{3}\xi^2 - \frac{4}{3}\xi\eta + \frac{4}{3}\eta^2)},$$

soit $\widehat{f}(\xi, \eta) = 2\pi \times 3^{-1/2} \times e^{-\frac{4}{3}\pi^2(\xi^2 - \xi\eta + \eta^2)}$.

1.6. La fonction $\theta \mapsto e^{iz \sin \theta}$ est C^∞ et 2π -périodique; son développement en série de Fourier donne, avec une série absolument convergente,

$$(1.6.1) \quad e^{iz \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \tau} e^{-in\tau} d\tau.$$

On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \tau} e^{-in\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{(iz \sin \theta)^l}{l!} e^{-in\tau} d\tau$$

et comme $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{|z|^l}{l!} d\tau = 2\pi e^{|z|} < +\infty$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \tau} e^{-in\tau} d\tau &= \sum_{l \geq 0} \frac{(iz)^l}{l!} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin \tau)^l e^{-in\tau} d\tau = \sum_{l \geq 0} \frac{(iz)^l}{l!} \int_{-\pi}^{\pi} (2i)^{-l} (e^{i\tau} - e^{-i\tau})^l e^{-in\tau} d\tau \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{z^l}{2^l} \sum_{\substack{l_1+l_2=l \\ l_j \in \mathbb{N}}} \frac{(-1)^{l_2}}{l_1! l_2!} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l_1-l_2-n)\tau} d\tau \\ &= \sum_{l_2 \geq 0} \frac{z^{2l_2+n}}{2^{2l_2+n}} \frac{(-1)^{l_2}}{(l_2+n)! l_2!} 2\pi = 2\pi \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(n+1+k)} = 2\pi J_n(z), \end{aligned}$$

ce qui, avec (1.6.1), donne le résultat cherché $e^{iz \sin \theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} J_n(z)$.

Exercice 2. 2.1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, on a $\text{Im } L(z) = \pi + \text{Im } \text{Log}(-z)$ qui parcourt l'intervalle $\pi+]-\pi, \pi[=]0, 2\pi[$ et $e^{L(z)} = -e^{\text{Log}(-z)} = z$. On a

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ \text{Im } z > 0}} z^t = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ \text{Im } z > 0}} e^{it\pi + t\text{Log}(-z)} = e^{it\pi} e^{-it\pi} = 1, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ \text{Im } z < 0}} z^t = e^{it\pi} \lim_{\substack{z' \rightarrow -1 \\ \text{Im } z' > 0}} e^{t\text{Log}(z')} = e^{2it\pi}.$$

2.2. Comme le contour $C_{\rho, \epsilon, R}$ est un compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \cap \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im } z| < 2\pi\}$, la fonction (holomorphe) L y est bien définie ainsi que $(e^z - 1)^{-1}$ (car $e^z = 1, z \neq 0$ équivaut à $z \in 2i\pi\mathbb{Z}^*$, impliquant $|\text{Im } z| \geq 2\pi$).

2.3. On a

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\rho, \epsilon, R}} z^{s-1} (e^z - 1)^{-1} dz \\ = - \int_0^R (\rho e^{i\epsilon} + r)^{s-1} (e^{\rho e^{i\epsilon} + r} - 1)^{-1} dr + \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \rho^{s-1} e^{i\theta(s-1)} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} i \rho e^{i\theta} d\theta \\ + \int_0^R (\rho e^{-i\epsilon} + r)^{s-1} (e^{\rho e^{-i\epsilon} + r} - 1)^{-1} dr. \end{aligned}$$

Pour $\rho \in]0, 2\pi[$, la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta(s-1)}(e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1}e^{i\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $e^{\rho e^{i\theta}} = 1$ équivaut à $\rho e^{i\theta} \in 2\pi i\mathbb{Z}$, i.e. $\rho \cos \theta = 0, \rho \sin \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, impliquant $\cos \theta = 0$ et $\rho \in 2\pi\mathbb{Z}$ ce qui est incompatible avec $\rho \in]0, 2\pi[$; on en déduit donc que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \rho^{s-1} e^{i\theta(s-1)} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} i\rho e^{i\theta} d\theta = i\rho^s \int_0^{2\pi} e^{i\theta(s-1)} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} e^{i\theta} d\theta, \quad (\text{ici } \rho^s = e^{s \ln \rho}).$$

Par ailleurs, on a pour $r \geq 0$ et $0 \leq \epsilon \leq \pi/3$,

$$|(\rho e^{i\epsilon} + r)^{s-1} (e^{\rho e^{i\epsilon} + r} - 1)^{-1}| = e^{-r} e^{\operatorname{Re}((s-1)L(\rho e^{i\epsilon} + r))} |e^{\rho e^{i\epsilon}} - e^{-r}|^{-1} \leq e^{-r} e^{\operatorname{Re}((s-1)L(\rho e^{i\epsilon} + r))} (e^{\rho/2} - 1)^{-1}$$

car $|e^{\rho e^{i\epsilon}} - e^{-r}| \geq e^{\rho \cos \epsilon} - e^{-r} \geq e^{\rho/2} - e^{-r} \geq e^{\rho/2} - 1$. En outre, on a

$$|L(\rho e^{i\epsilon} + r)| \leq 2\pi + \operatorname{Log}(|\rho e^{i\epsilon} + r|) \leq 2\pi + \operatorname{Log}(\rho + r),$$

ce qui donne pour $r \geq 0$ et $0 \leq \epsilon \leq \pi/3$,

$$|(\rho e^{i\epsilon} + r)^{s-1} (e^{\rho e^{i\epsilon} + r} - 1)^{-1}| \leq e^{-r} e^{|s-1|(2\pi + \operatorname{Log}(\rho + r))} (e^{\rho/2} - 1)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+, dr) \quad \text{si } \rho > 0.$$

Un raisonnement analogue pour l'autre intégrale de 0 à R et le théorème de convergence dominée de Lebesgue donnent

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0+ \\ R \rightarrow +\infty}} \oint_{C_{\rho, \epsilon, R}} z^{s-1} (e^z - 1)^{-1} dz &= - \int_0^{+\infty} (\rho + r)^{s-1} (e^{\rho + r} - 1)^{-1} dr \\ &\quad + i\rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta + \int_0^{+\infty} e^{2i\pi(s-1)} (\rho + r)^{s-1} (e^{\rho + r} - 1)^{-1} dr, \end{aligned}$$

soit, en posant ici et dans la suite pour $x > 0$, $x^t = e^{t \ln x}$,

$$(2.3.1) \quad F(\rho, s) = - \int_{\rho}^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx + i\rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta + e^{2i\pi s} \int_{\rho}^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx.$$

2.4. On calcule pour $\rho \in]0, 2\pi[$, en notant que l'intégrale de 0 à 2π dans la formule (2.3.1) porte sur une fonction C^1 ,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = (1 - e^{2i\pi s}) \rho^{s-1} (e^{\rho} - 1)^{-1} + is \rho^{s-1} \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta - i\rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-2} e^{\rho e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta.$$

Comme

$$\begin{aligned} -i\rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-2} e^{\rho e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta &= \rho^{s-1} \int_0^{2\pi} e^{is\theta} \frac{d}{d\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta \\ &= \rho^{s-1} (e^{2i\pi s} (e^{\rho} - 1)^{-1} - (e^{\rho} - 1)^{-1}) - is \rho^{s-1} \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta, \end{aligned}$$

il vient $\frac{\partial F}{\partial \rho} = \rho^{s-1} (e^{\rho} - 1)^{-1} (1 - e^{2i\pi s} + e^{2i\pi s} - 1) = 0$.

2.5. Pour $\rho = 1$, les trois intégrales de (2.3.1) sont des fonctions entières de s car

- (1) $\forall s \in \mathbb{C}, x \mapsto x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} \in L^1([1, +\infty))$,
- (2) $\forall x \geq 1, s \mapsto x^{s-1} (e^x - 1)^{-1}$ est entière,
- (3) $\sup_{|s| \leq M} |x^{s-1} (e^x - 1)^{-1}| \leq x^{(M+1)} (e^x - 1)^{-1} \in L^1([1, +\infty))$

et par ailleurs la fonction $s \mapsto \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta$ est entière car

- (1) $\forall s \in \mathbb{C}, \theta \mapsto e^{is\theta} (e^{e^{i\theta}} - 1)^{-1} \in L^1([0, 2\pi])$,
- (2) $\forall \theta \in [0, 2\pi], s \mapsto e^{is\theta} (e^{e^{i\theta}} - 1)^{-1}$ est entière,
- (3) $\sup_{|s| \leq M} |e^{is\theta} (e^{e^{i\theta}} - 1)^{-1}| \leq e^{2\pi M} (e^{e^{i\theta}} - 1)^{-1} \in L^1([0, 2\pi])$.

2.6. En reprenant la formule (2.3.1) pour $\operatorname{Re} s > 1$, on obtient pour tout $\rho \in]0, 2\pi[$,

$$F(\rho, s) = - \int_{\rho}^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx + i\rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta + e^{2i\pi s} \int_{\rho}^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx,$$

et par conséquent $F(\rho, s) = \lim_{\rho \rightarrow 0+} F(\rho, s) = (e^{2i\pi s} - 1) \int_0^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx$; en effet, pour $\operatorname{Re} s > 1$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \int_{\rho}^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} (e^x - 1)^{-1} dx$$

car $|x^{s-1} (e^x - 1)^{-1}| = x^{\operatorname{Re} s - 1} (e^x - 1)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ (fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, exponentiellement décroissante en $+\infty$, équivalente à $x^{\operatorname{Re} s - 2}$ en 0) et par ailleurs $\lim_{\rho \rightarrow 0+} \rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta = 0$ car la fonction $z/(e^z - 1)$ est holomorphe et donc bornée au voisinage de 0, ce qui donne pour $\rho > 0$ assez petit,

$$\left| \rho^s \int_0^{2\pi} e^{is\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1} d\theta \right| \leq e^{2\pi|s|} \rho^{\operatorname{Re} s - 1} \int_0^{2\pi} |\rho e^{i\theta} (e^{\rho e^{i\theta}} - 1)^{-1}| d\theta \leq C e^{2\pi|s|} \rho^{\operatorname{Re} s - 1} \rightarrow 0. \quad \rho \rightarrow 0+$$