

GROUPES CLASSIQUES (G03)- MASTER1
Examen final du 4/1/06-Corrigé

Exercice 1 II. *Questions* (i) NON: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ne sont pas isomorphes, le 1er étant cyclique et le 2e ne l'étant pas.

(ii) OUI: $|\mathfrak{A}_8| = 64.105$, donc le 2-Sylow de $\mathfrak{A}_8$ est d'ordre 64.

(iii) OUI: $|\mathbb{P}^1(K)| = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1$, si $|K| = q$.

(iv) OUI: soit $\varphi : SO(6) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ un homomorphisme non trivial Alors $(\varphi(-I))^2 = \varphi((-I)^2) = \varphi(I) = 1$, i.e $\varphi(-I) = 1$ et φ factorise donc en un homomorphisme $\tilde{\varphi} : PSO(6) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Comme $PSO(6)$ est simple, $\ker \tilde{\varphi} = \{e\}$. Ainsi, $PSO(6)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ et est donc abélien, ce qui est absurde.

(v) OUI: Soit E_0 le plan engendré par les 2 premiers vecteurs e_1, e_2 de la base canonique de K^4 . Soit E un plan quelconque de K^4 . E est engendré par 2 vecteurs linéairement indépendants a, b . Pour la matrice $A \in GL_4(K)$ définie par $Ae_1 = a, Ae_2 = b$, on a $A(E_0) = E$.

Exercice 2 (i) $\varphi([X, Y]A) = \varphi(X(Y)(X^{-1}Y^{-1}A)) = \varphi(YXX^{-1}Y^{-1}A) = \varphi(YY^{-1}A) = \varphi(A)$.

(ii) De (i), il s'ensuit par récurrence que $\varphi(XA) = \varphi(A)$ si X est un produit de commutateurs, i.e si $X \in [GL_n(K), GL_n(K)]$. Comme $(n, K) \neq (2, \mathbb{F}_2)$, on a $[GL_n(K), GL_n(K)] = SL_n(K)$.

(iii) Soit $\psi : K^* \rightarrow K$ définie par $\psi(\alpha) = D_\alpha$, où $D_\alpha = \text{Diag}(\alpha, 1, \dots, 1) \in GL_n(K)$. Soit $A \in GL_n(K)$. Avec $\alpha = \det A$ on a $A(D_\alpha)^{-1} \in SL_n(K)$ et donc par (ii) $\varphi(A) = \varphi((A(D_\alpha)^{-1})D_\alpha) = \varphi(D_\alpha)$. D'où $\varphi(A) = \psi(\det A)$.

(iv) On peut identifier $GL_2(\mathbb{F}_2)$ à $\mathfrak{S}_3$ qui lui est isomorphe. Soit $\varphi : GL_2(\mathbb{F}_2) \rightarrow \{\pm 1\}$ l'homomorphisme de signature. Alors

$$\varphi(ABC) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C) = \varphi(B)\varphi(A)\varphi(C) = \varphi(BAC)$$

pour tous $A, B, C \in GL_2(\mathbb{F}_2)$. Comme F_2^* n'a qu'un élément, s'il existait $\psi : F_2^* \rightarrow \{\pm 1\}$ tel que $\varphi = \psi \circ \det$, alors φ serait constant, ce qui est absurde.

Exercice 3 (i) On a $S_{q_0}(p) = q_0(q_0 - a1)\overline{q_0} = q_0^2\overline{q_0} - aq_0\overline{q_0} = q_0 - a1 = p$. Comme $q_0 \notin \{\pm 1\}$, $S_{q_0} \neq I$ et ceci montre que $\mathbb{R}p$ est l'axe de rotation de S_{q_0} .

(ii) $SO(3)$ agit transitivement sur les sphères dans $P \simeq \mathbb{R}^3$ centrées en 0 et donc sur celle de rayon $\|p\|$. Il existe ainsi $M \in SO(3)$ tel que $M(p) = \|p\|i$. Par un théorème du cours, il existe $q_1 \in G$ tel que $S_{q_1} = M$.

(iii) $S_{q_1}S_{q_0}S_{q_1}^{-1}$ est la rotation d'axe $S_{q_1}(p) = \|p\|i$ et de même angle que S_{q_0} . Mais $q'_0 = a1 + \|p\|i = a1 + S_{q_1}(p) = a1 + q_1p\overline{q_1} = q_1(a1 + p)\overline{q_1} = q_1q_0q_1^{-1}$ et donc $S_{q'_0} = S_{q_1q_0q_1^{-1}} = S_{q_1}S_{q_0}S_{q_1}^{-1}$.

(iv) On a $S_{q'_0}(j) = (a1 + \|p\|i)j(a1 - \|p\|i) = (aj + \|p\|k)(a1 - \|p\|i) = (a^2 - \|p\|^2)j + 2a\|p\|k = \cos(2\theta)j + \sin(2\theta)k$ et donc $\langle S_{q'_0}(j)|j \rangle = \cos 2\theta$.

(v) On a $S_{q'_0}(i) = i$ et $S_{q'_0}(j) = \cos(2\theta)j + \sin(2\theta)k$. Ainsi la matrice de $S_{q'_0}$

dans la base orientée $\{i, j, k\}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$. L'angle de rotation

de S_{q_0} est donc 2θ .

Exercice 4 I. (i) A est annulée par le polynôme $P(X) = X^k - 1$ et P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ (les racines k -ièmes de l'unité). Le polynôme minimal de A divise P et ne possède donc que des racines simples. Par conséquent, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont toutes des racines k -ièmes de l'unité.

(ii) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (comptées avec multiplicité). On a $\text{Trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$. D'où $\text{Re}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \text{Re}(\lambda_1) + \dots + \text{Re}\lambda_n = n$. Comme les λ_i sont de module 1, on a $\text{Re}(\lambda_i) \leq 1$. Il s'ensuit que $\text{Re}(\lambda_i) = 1$ et donc $\lambda_i = 1$ pour tout i . A étant diagonalisable, ceci implique que $A = I_n$.

II. (i) Par I.i, les valeurs propres de tout $A \in G$ appartiennent à l'ensemble μ_k des racines k -ièmes de l'unités dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, l'ensemble $\{\text{Trace}(A)/A \in G\}$ est une partie de l'ensemble $\{\sum_i^n \lambda_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mu_k^n\}$ qui est fini.

(ii) Soient $A, B \in G$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Alors $\text{Trace}((A - B)X_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et donc $\text{Trace}((A - B)X) = 0$ pour tout $X \in E$, par linéarité de la trace. En particulier, $\text{Trace}((A - B)B^{-1}) = 0$, i.e. $\text{Trace}(AB^{-1}) = \text{Trace}(I_n) = n$. Par I.ii, ceci implique que $AB^{-1} = I_n$, c-à-d $A = B$.

(iii) Par (i), l'image $\varphi(G)$ est une partie finie de $\mathbb{C}^r$. Par (ii), l'application $\varphi : G \rightarrow \varphi(G)$ est une bijection. Donc G est fini.