Examen - Corrigé

Exercice 1. Soit $H = l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < +\infty$. On définit pour tous $x, y \in H$

$$\big(x \,|\, y\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \overline{y_i}\ .$$

a) H est un espace vectoriel, car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
En effet, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in H$, alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |(\lambda x)_i|^2 = |\lambda| \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 < +\infty$$

donc $\lambda x \in H$.
De même, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$, soit aussi $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$, d'où pour tous $x, y \in H$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i|^2 \leq 2\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 + 2\sum_{i\in\mathbb{N}} |y_i|^2 < +\infty$$

donc $x + y \in H$.

L'inégalité $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$ permet de vérifier que pour tous $x, y \in H$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i\overline{y_i}| \leq \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{N}} |y_i|^2 < +\infty$$

donc la série définissant $(x|y)$ est absolument convergente, soit aussi convergente.
L'application $(\cdot|\cdot)$ est bien définie sur H^2. Elle vérifie aussi :

- linéarité en la première variable : $(\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, y \in H$ (on peut faire les opérations algébriques sur les séries, une fois qu'on a vérifié qu'elles étaient convergentes) ;
- symétrie hermitienne : $(x|y) = \overline{(y|x)}$ pour tous $x, y \in H$;
- pour tout $x \in H$,
$$(x \,|\, x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2 \geq 0$$
- $(x \,|\, x) = 0$ si et seulement si $x_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui équivaut à $x = 0$.

En conclusion, l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire, qui fait donc de H un espace préhilbertien.

b) H est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^2}$$

associée au produit scalaire.
Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H. Comme on a $|x_i| \leq \|x\|$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $x \in H$, pour chaque coordonnée $i \in \mathbb{N}$ la suite de complexes $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy, donc converge, notons $x_i^{(\infty)}$ sa limite.

La suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc bornée pour $\|\cdot\|$, soit $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x^{(n)}\| < +\infty$. On a alors pour tout $I \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{I} \left|x_i^{(\infty)}\right|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{I} \left|x_i^{(n)}\right|^2 < M^2 .$$

Puisque c'est valable pour tout $I \in \mathbb{N}$, on peut faire tendre I vers $+\infty$ et en conclure que $x^{(\infty)} = (x_i^{(\infty)})_{i\in\mathbb{N}}$ est dans H, de norme plus petite que M.
On prouve de la même manière[1] que $x^{(\infty)}$ est limite dans H de la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tous $n, m \geq n_0$, $\|x(n)-x(m)\| \leq \varepsilon$. On en déduit que pour tout $I \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{I} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(\infty)}\right|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{I} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^2 < \varepsilon^2 ,$$

puis que $\|x^{(n)} - x^{(\infty)}\| \leq \varepsilon$ en faisant tendre I vers $+\infty$. C'est bien la conclusion souhaitée.

c) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $e^{(n)}$ de H par

$$e_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker associé au couple (i, j), qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. On a donc $e^{(n)} = (\delta_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$, puis pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$(e^{(n)} \mid e^{(m)}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{n,i}\delta_{m,i} = \delta_{n,m} .$$

La famille $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthonormale.

[1] On peut en fait traiter les deux points en même temps, et aller un peu plus vite en utilisant le lemme de Fatou.

Pour montrer que $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, c'est-à-dire que l'espace vectoriel engendré est dense, il suffit de montrer[2] que celui-ci est d'orthogonal réduit à $\{0\}$. Soit $x \in (\mathrm{Vect}(e^{(n)}\ :\ n \in \mathbb{N}))^{\perp}$, alors en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = (x \mid e^{(n)}) = 0$$

donc $x = 0$.

La famille $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est finalement orthonormale et totale, c'est donc une base hilbertienne de H.

d) Pour tout $x \in H$, on pose $(Ax)_0 = 0$ et

$$(Ax)_i = \frac{1}{i} x_{i-1} \quad \text{si } i \in \mathbb{N}^* .$$

Si $x \in H$, alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |(Ax)_i|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \frac{|x_{i-1}|^2}{i^2} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}^*} |x_{i-1}|^2 = \|x\|^2 < +\infty .$$

ainsi $Ax = ((Ax)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définit un élément de H, A est donc bien défini comme application de H dans H.

On vérifie immédiatement (terme à terme) que A est linéaire, soit aussi, grâce à l'estimation déjà faite ci-dessus, continue de norme plus petite que 1.

Comme par ailleurs $Ae^{(0)} = e^{(1)}$, on a $\|A\| = 1$.

e) Pour trouver les valeurs propres de A, on résoud pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ le système linéaire

$$Ax = \lambda x \iff \begin{cases} 0 = (Ax)_0 = \lambda x_0 \\ \frac{x_{i-1}}{i} = (Ax)_i = \lambda x_i \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Soit $\lambda = 0$, mais alors $x_{i-1} = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, donc $x = 0$.

Soit $\lambda \neq 0$, mais alors $x_0 = 0$, puis $x_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ par récurrence, donc $x = 0$.

Dans les deux cas, λ n'est pas valeur propre, donc A n'a aucune valeur propre.

f) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit A_N définie par

$$(A_N x)_i = \begin{cases} (Ax)_i & \text{si } i < N\,; \\ 0 & \text{si } i \geq N. \end{cases}$$

Alors A_N est linéaire continue (directement, ou comme composée de A et d'une projection orthogonale) de rang fini, puisque $\mathrm{Im} A_N = \mathrm{Vect}(e^{(n)}\ :\ 1 \leq n < N)$.

De plus, pour tout $x \in H$,

$$\|(A - A_N)x\|^2 = \sum_{i\geq N} \frac{|x_{i-1}|^2}{i^2} \leq \frac{1}{N^2} \sum_{i\geq N} |x_{i-1}|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{N^2} ,$$

[2] Il y avait pour cette question plusieurs autres façons de répondre : calcul direct, caractérisation par l'identité de Parseval.

donc $\|A - A_n\| \le \frac{1}{N}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Ainsi A est limite d'opérateurs de rang fini, donc est un opérateur compact[3].

Puisque A est compact, toutes ses valeurs spectrales non-nulles sont des valeurs propres, donc d'après la question précédente, A n'a pas de valeurs spectrales non-nulles. De plus, 0 est toujours valeur spectrale d'un opérateur compact en dimension infinie[4]. Finalement,

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0\} \ .$$

Exercice 2. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel. Pour $p \ge 1$, on associe à tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ la matrice $p \times p$ de terme général $g_{i,j} = (x_i \,|\, x_j)$. On l'appelle matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_p)$, et on la note $G(x_1, \dots, x_p) = (g_{i,j})_{1 \le i,j \le p}$. Le déterminant de cette matrice est appelé déterminant de Gram de $(x_1, \dots, x_p)$.

a) Puisqu'on travaille dans un espace de Hilbert réel, le produit scalaire est symétrique, d'où pour tous $1 \le i, j \le p$

$$g_{i,j} = (x_i \,|\, x_j) = (x_j \,|\, x_i) = g_{j,i} \ .$$

b) On obtient

$$\det G(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} (x_1 \,|\, x_1) & (x_1 \,|\, x_2) \\ (x_2 \,|\, x_1) & (x_2 \,|\, x_2) \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (x_1 \,|\, x_2)^2 \ge 0$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le déterminant s'annule en cas d'égalité dans cette inégalité, c'est-à-dire si et seulement si les deux vecteurs x_1 et x_2 sont liés.

c) Pour tout $p \ge 1$, et $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{aligned} a\, G(x_1, \dots, x_p)\, {}^t a &= \sum_{1 \le i,j \le p} a_i (x_i \,|\, x_j) a_j \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{p} a_i x_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^{p} a_j x_j \Big) = \Big\| \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \Big\|^2 \ge 0 \ , \end{aligned}$$

donc $G(x_1, \dots, x_p)$ est une matrice symétrique positive, toutes ses valeurs propres sont par conséquent positives ou nulles, puis son déterminant (produit de ses valeurs propres, puisqu'elle est diagonalisable) est positif ou nul.
Il est strictement positif si et seulement si toutes les valeurs propres sont strictement positives, si et seulement $G(x_1, \dots, x_p)$ est définie positive, c'est-à-dire

[3] On pouvait montrer de manière plus simple que A est de Hilbert-Schmidt, donc compact.
[4] On peut aussi vérifier très facilement que A n'est pas surjectif.

vérifie $\| \sum_{i=1}^p a_i x_i \| > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p a_i x_i \neq 0$ pour tout $a \neq 0$, ce qui signifie exactement que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
Ainsi $\det G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée.

Variante : Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ (on l'obtient par orthonormalisation d'une sous-famille libre de $(x_1, \ldots, x_p)$, par exemple). On a alors $m \leq p$ et $m = p$ si et seulement si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. Il existe une matrice $\alpha \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq p$, $x_i = \sum_{1\leq j\leq m} \alpha_{i,j} e_j$, soit aussi, pour $1 \leq i_1, i_2 \leq p$,

$$(x_{i_1} \,|\, x_{i_2}) = \sum_{1\leq j\leq m} \alpha_{i_1,j}\alpha_{j,i_2} \implies G(x_1, \ldots, x_p) = A\,{}^t\!A \, .$$

Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée, alors $A\,{}^t\!A$ est de rang m strictement plus petit que p, donc $\det G(x_1, \ldots, x_p) = \det\,(A\,{}^t\!A) = 0$.
Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, alors A est inversible, comme matrice de changement de base, donc $A\,{}^t\!A$ aussi, et $\det G(x_1, \ldots, x_p) = \det\,(A\,{}^t\!A) = (\det A)^2 > 0$.

d) Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc fermé, de H, et on peut considérer le projeté orthogonal y de x sur F. On sait que $\mathrm{d}(x, F) = \|x - y\|$, que $x - y \in F^\perp$, et qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $y = \sum_{1\leq i\leq p} \lambda_i x_i$.[5]
On écrit

$$\begin{aligned} G(x, x_1, \ldots, x_p) &= \begin{bmatrix} (x\,|\,x) & (x\,|\,x_1) & \cdots & (x\,|\,x_p) \\ (x_1\,|\,x) & & & \\ \vdots & & G(x_1, \ldots, x_p) & \\ (x_p\,|\,x) & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x\,|\,x) & (x\,|\,x_1) & \cdots & (x\,|\,x_p) \\ (x_1\,|\,y) & & & \\ \vdots & & G(x_1, \ldots, x_p) & \\ (x_p\,|\,y) & & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On peut alors procéder au calcul du déterminant, en remplaçant la première colonne C_1 par la combinaison linéaire $C_1 - \sum_{1\leq i\leq p} \lambda_i C_{i+1}$, ce qui reconstitue le vecteur y et donne en développant ensuite par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \det G(x, x_1, \ldots, x_p) &= \begin{vmatrix} (x\,|\,x) - (x\,|\,y) & (x\,|\,x_1) & \cdots & (x\,|\,x_p) \\ 0 & & & \\ \vdots & & G(x_1, \ldots, x_p) & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\ &= (x\,|\,x - y)\ \det G(x_1, \ldots, x_p) \, . \end{aligned}$$

[5] On ne peut pas identifier les λ_i car $(x_1, \ldots, x_p)$ n'est pas une famille orthonormale. Cette écriture suffira.

On remarque que $(x \,|\, x-y) = (x \,|\, x-y) - (y \,|\, x-y) = \|x-y\|^2$ pour obtenir la formule

$$d(x,F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_p)}{\det G(x_1, \ldots, x_p)} \,. \tag{1}$$

Exercice 3. On travaillera désormais dans l'espace de Hilbert $E = L^2([0;1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel

$$\big(f \,|\, g\big) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

Pour tout réel r positif, on note h_r la fonction de E définie par $h_r(x) = x^r$.

a) On sait par le théorème de (Stone-)Weierstrass que l'ensemble des fonctions polynomiales $\mathrm{Vect}(h_n\,:\,n \in \mathbb{N})$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.
Comme par ailleurs $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R}) \subset E$ et $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, $\mathrm{Vect}(h_n\,:\,n \in \mathbb{N})$ est encore dense dans $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.
Enfin, $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_2)$ donc $\mathrm{Vect}(h_n\,:\,n \in \mathbb{N})$, sous-ensemble dense d'un sous-ensemble dense, est lui aussi dense. La famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finalement totale dans E.

b) On fixe une suite strictement croissante $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs (ou nuls). Pour tout $k \geq 0$, soit H_k le sous-espace vectoriel de E engendré par $(h_{r_0}, \ldots, h_{r_k})$.
Remarquons d'abord que, pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{k\to\infty} d(f, H_k) = 0 \iff f \in \overline{\mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})} \,.$$

En effet, si $\lim_{k\to\infty} d(f,H_k) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ $d(f,H_k) < \varepsilon$, donc en particulier il existe $g \in H_{k_0} \subset \mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f \in \overline{\mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})}$.
Réciproquement, supposons que $f \in \overline{\mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})}$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})$ tel que $\|f-g\| < \varepsilon$. Mais alors g est une combinaison linéaire finie des h_{r_i} donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $g \in H_{k_0} \subset H_k$ pour tout $k \geq k_0$. ainsi $d(f,H_k) < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_0$. On peut conclure que $\lim_{k\to\infty} d(f,H_k) = 0$.

Comme par ailleurs $\overline{\mathrm{Vect}(h_n\,:\,n \in \mathbb{N})} = E$, on vérifie directement que

$$\begin{aligned}
(h_{r_i})_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une famille totale } &\Leftrightarrow \mathrm{Vect}(h_n\,:\,n \in \mathbb{N}) \subset \overline{\mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ h_n \in \overline{\mathrm{Vect}(h_{r_i}\,:\,i \in \mathbb{N})} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} d(h_n, H_k) = 0 \,.
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la deuxième ligne que l'adhérence d'un espace vectoriel est encore un espace vectoriel.

c) i. Pour $p = 1$,

$$\Delta_1 = \left| \tfrac{1}{2a_1} \right| = \frac{1}{2a_1} \ ,$$

ce qui est bien la formule annoncée.
S'il existe $i \neq j$ tels que $a_i = a_j$, le déterminant cherché est nul et la formule immédiate. On suppose donc désormais que $a_i \neq a_j$ pour tous $i \neq j$, et on cherche une relation de récurrence entre Δ_p et Δ_{p-1} pour $p \geq 2$.
On remarque en développant par rapport à la dernière colonne puis en réduisant au même dénominateur que

$$\begin{aligned} \Delta_p(X) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} & \frac{1}{a_1+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+a_{p-1}} & \frac{1}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+a_1} & \frac{1}{a_2+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+a_{p-1}} & \frac{1}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+a_1} & \frac{1}{a_p+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_p+a_{p-1}} & \frac{1}{a_p+X} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} \frac{\lambda_i(a_1, \dots, a_p)}{a_i + X} \\ &= \frac{P_{(a_1,\dots,a_p)}(X)}{\prod_{1 \leq i \leq p}(a_i + X)} \end{aligned}$$

avec $P_{(a_1,\dots,a_p)}$ un polynôme de degré au plus $p-1$. Comme par ailleurs, pour tout $1 \leq i \leq p-1$, $\Delta_p(a_i) = 0$ (car les colonnes i et p coïncident), on obtient qu'il existe $C = C(a_1, \dots, a_p)$ telle que

$$\Delta_p(X) = C \ \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i - X)}{\prod_{i=1}^{p}(a_i + X)} \ . \tag{2}$$

On en déduit que

$$C = \prod_{1 \leq i \leq p-1} \frac{a_i + X}{a_i - X} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} & \frac{1}{a_1+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+a_{p-1}} & \frac{1}{a_1+X} \\ \frac{1}{a_2+a_1} & \frac{1}{a_2+a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+a_{p-1}} & \frac{1}{a_2+X} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_p+X}{a_p+a_1} & \frac{a_p+X}{a_p+a_2} & \cdots & \frac{a_p+X}{a_p+a_{p-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

On spécifie alors $X = -a_p$ et on développe par rapport à la dernière ligne, pour obtenir $C = \prod_{1 \leq i \leq p-1} \frac{a_i - a_p}{a_i + a_p} \Delta_{p-1}$, d'où en injectant cette relation dans (2) avec $X = a_p$,

$$\Delta_p = \Delta_p(a_p) = \frac{1}{2a_p} \prod_{1 \leq i \leq p-1} \left(\frac{a_i - a_p}{a_i + a_p} \right)^2 \Delta_{p-1} \ . \tag{3}$$

C'est exactement la relation de récurrence qui permet d'établir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\Delta_p = \det(A_p) = \frac{1}{2^p} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{a_j} \prod_{1 \leq k < l \leq p} \left(\frac{a_k - a_l}{a_k + a_l} \right)^2 \ .$$

ii. On remarque que

$$(h_r \,|\, h_s) = \int_0^1 x^{r+s} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+s+1} = \frac{1}{(r+\frac{1}{2})+(s+\frac{1}{2})} \ .$$

Le calcul des déterminants de Gram de $(h_{r_0}, \ldots, h_{r_k})$ et de $(h_{r_0}, \ldots, h_{r_k}, h_n)$ se ramène donc à la question précédente avec des coefficients $a_i = r_{i-1} + \frac{1}{2}$. On peut même directement utiliser la relation de récurrence (3) pour obtenir

$$\det G(h_n, h_{r_0}, \ldots, h_{r_k}) = \frac{1}{2(n+\frac{1}{2})} \prod_{0 \leq i \leq k} \left(\frac{r_i - n}{r_i + n + 1}\right)^2 \det G(h_{r_0}, \ldots, h_{r_k}) \ ,$$

soit aussi, avec la formule (1),

$$d(h_n, H_k)^2 = \frac{1}{2n+1} \prod_{i=0}^{k} \left(\frac{r_i - n}{r_i + n + 1}\right)^2 \ .$$

iii. Si $n = r_i$ pour un certain i, on a forcément $h_n \in \mathrm{Vect}(h_{r_i} \ : \ i \in \mathbb{N})$. Fixons donc un n différent de tous les r_i. On a toujours $r_i - n \leq r_i + n + 1$, donc $\prod_{i=0}^{k} \left(\frac{r_i - n}{r_i+n+1}\right)^2$ est une suite décroissante, qui tend soit vers 0 soit vers $c > 0$. De plus

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=0}^{k} \left(\frac{r_i - n}{r_i + n + 1}\right)^2 \longrightarrow c = e^{-C} > 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{k} \ln\left(\frac{r_i + n + 1}{|r_i - n|}\right) \longrightarrow C = -\ln c < +\infty \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{r_i+n+1}{|r_i - n|} \longrightarrow 1 \\ \sum_{i \in \mathbb{N}} \ln\left(\frac{r_i+n+1}{|r_i-n|}\right) < +\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} r_i \longrightarrow +\infty \\ \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{r_i+n+1}{|r_i-n|} - 1\right) < +\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{r_i} < +\infty \ .
\end{aligned}$$

car $\frac{r_i+n+1}{|r_i|-n} \longrightarrow 1$ si et seulement si $r_i \longrightarrow +\infty$ et on a alors $\ln(\frac{r_i+n+1}{|r_i-n|}) \sim (\frac{r_i+n+1}{|r_i-n|} - 1) = \frac{2n+1}{r_i-n} \sim \frac{1}{r_i}$, où l'égalité est valable pour i assez grand. On peut donc conclure en prenant la négation de cette équivalence.