

Examen Terminal
Mercredi 10 Mai 2006
CORRIGE

Exercice 1

Répondre aux questions suivantes par VRAI ou FAUX, *sans justifier la réponse*.

- A. Soit (E, d) un espace métrique.
- 1) Si O est un ouvert non vide de E et $x \in E \setminus O$, alors $d(x, O) > 0$.
 - 2) Si (E, d) est complet, et si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante ($F_{n+1} \subset F_n, n \in \mathbb{N}$) de fermés non vides, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
- B. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.
- 1) Si Ω est un ouvert de E , et si Ω est connexe, Ω est connexe par arcs.
 - 2) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, F est fermé dans E .
 - 3) Si F est un hyperplan de E (i.e. le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E), F est fermé dans E .
 - 4) Si E est complet, la boule unité fermée de E est compacte.

SOLUTION

- A.
- 1) FAUX : Prendre $O =]0, 1[$ et $x = 0$ dans $E = \mathbb{R}$.
 - 2) FAUX : Prendre $F_n = [n, +\infty[$ dans $E = \mathbb{R}$.
Par contre, si $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés non vides, avec $\delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, dans un espace métrique complet, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est non vide et réduit à un point.
- B.
- 1) VRAI : Un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs (les boules sont convexes et donc connexes par arcs).
 - 2) VRAI : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace normé E est fermé dans E .
 - 3) FAUX : Prendre $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $P \mapsto N_{\infty, [0, 1]}(P) = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$ et l'hyperplan $H = \delta_2^{-1} \{0\}$ où $\delta_2 : E \rightarrow \mathbb{R} : P \mapsto \delta_2(P) = P(2)$.
Dire que l'hyperplan H est fermé équivaut à dire que la forme linéaire $\delta_2 : (E, N_{\infty, [0, 1]}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, i.e. : il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $P \in E : |\delta_2(P)| \leq C \cdot N_{\infty, [0, 1]}(P)$.
Et en considérant la suite de polynômes $P_n(X) := X^n$, on aurait, pour tout entier $n \in \mathbb{N}, 2^n \leq C \cdot 1$, ce qui est absurde.
 - 4) FAUX : Pour un espace vectoriel normé E , dire que sa boule unité $B_f(0, 1)$ est compacte équivaut à dire que E est de dimension finie (Théorème de Riesz).

Exercice 2

Répondre aux questions suivantes par VRAI ou FAUX, en justifiant la réponse.

I. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$; on note $A + B = \{a + b ; a \in A, b \in B\}$.

- 1) Si A et B sont compactes, $A + B$ est compacte.
- 2) Si A est ouvert, $A + c$ est ouvert pour tout $c \in \mathbb{R}^n$.
- 3) Si A est ouvert, $A + B$ est ouvert.

II. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leq n$.

- 1) L'application $P \mapsto N(P) = \sum_{k=0}^n |P(k)| : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme équivalente à la norme $P \mapsto \|P\|_{\infty, [0, 1]} = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$.
- 2) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X] : |P(-1)| \leq C \cdot N(P)$.

SOLUTION

- I. 1) VRAI : $A + B$ est compacte car si $(x_n = a_n + b_n)_n$ est une suite de points de $A + B$, on peut extraire de la suite $(a_n)_n$ une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_n$ convergente vers un point $a \in A$ puisque A est compacte ; de même, de la suite $(b_{\varphi(n)})_n$ on peut extraire une sous-suite $(b_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ convergente vers un point $b \in B$ puisque B est compacte.
Ainsi, on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ de points de $A + B$, une sous-suite $(x_{\psi \circ \varphi(n)})_n$ convergente vers un point $a + b$ de $A + B$, ce qui implique que $A + B$, partie de l'espace métrique $\mathbb{R}^n$, est compacte (Théorème de Bolzano-Weierstraß).
- 2) VRAI : L'application $x \mapsto x + c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme et donc transforme l'ouvert A en un ouvert $A + c$.
- 3) VRAI : Si A est ouvert, pour tout $b \in B$, $A + b$ est ouvert et donc aussi $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$.
- II. 1) VRAI : Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On sait déjà (cours) que $P \mapsto \|P\|_{\infty, [0, 1]}$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $(n + 1)$, il suffit de vérifier que $P \mapsto N(P)$ est une norme.
Or $N(P) = 0 \iff P(k) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n$. Comme $d^0 P \leq n$, cela équivaut à $P = 0$.
Les autres axiomes $N(\lambda \cdot P) = |\lambda| N(P)$ et $N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$ sont évidents.
- 2) VRAI : L'application $P \mapsto P(-1) : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire sur un espace vectoriel normé $(\mathbb{R}_n[X], N)$ de dimension finie, donc est continue : il existe $C \geq 0$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $|P(-1)| \leq C \cdot N(P)$.

Exercice 3

Soient K un espace topologique compact et $C^0(K; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs réelles muni de la norme $f \mapsto \|f\|_{\infty, K} = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

- 1) Soit I un idéal de l'anneau $C^0(K; \mathbb{R})$, i.e. un sous-anneau de $C^0(K; \mathbb{R})$ tel que pour tous $f \in I$ et $g \in C^0(K; \mathbb{R})$, $g \cdot f \in I$.
Montrer que si la fonction constante $\mathbf{1} : x \mapsto 1 : K \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à I , alors $I = C^0(K; \mathbb{R})$.
- 2) Soit $x \in K$. On pose : $J(x) = \{f \in C^0(K; \mathbb{R}); f(x) = 0\}$.
 - a) Montrer que $J(x)$ est un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$, que $J(x) \neq C^0(K; \mathbb{R})$ et que $J(x)$ est un sous-espace complet de $C^0(K; \mathbb{R})$.
 - b) Soit $f_0 \in C^0(K; \mathbb{R}) \setminus J(x)$.
Montrer que, pour toute fonction $h \in C^0(K; \mathbb{R})$, il existe $f \in J(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $h = f + \lambda \cdot f_0$.
En déduire que $J(x)$ est maximal dans $C^0(K; \mathbb{R})$, i.e. si I est un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$ avec $J(x) \subset I$ et $J(x) \neq I$, alors $I = C^0(K; \mathbb{R})$.
- 3) Soit I un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$ avec $I \neq C^0(K; \mathbb{R})$.
 - a) Soit $f \in I$. Montrer que $\bigcap_{f \in I}^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.
(On pourra raisonner par l'absurde et considérer la fonction $g := \frac{1}{f} \cdot$.)
 - b) Soient $f_1, \dots, f_n, n$ éléments de I .
Justifier que $f = \sum_{i=1}^n f_i^2 \in I$. En déduire que $\bigcap_{f \in I}^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.
 - c) Déduire de la question 3b) que $\bigcap_{f \in I}^{-1}(\{0\})$ est non vide et qu'il existe $x \in K$ tel que $I \subset J(x)$.
- 4) Déduire des questions 2 et 3 que l'application $x \mapsto J(x)$ de K dans l'ensemble $\mathcal{M}$ des idéaux maximaux de $C^0(K; \mathbb{R})$ est bijective.

SOLUTION

- 1) Si $f \in C^0(K; \mathbb{R})$, comme la fonction $\mathbf{1}$ appartient à l'idéal I et que $f = f \cdot \mathbf{1} \in I$, on en déduit que $C^0(K; \mathbb{R}) \subset I$, d'où l'égalité.
 - 2) a) $J(x)$ vérifie : si $f, g \in J(x)$ alors $f - g \in I$ et $f \cdot g \in I$ puisque $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0$ et $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$. De plus, si $f \in C^0(K; \mathbb{R})$ et $g \in I$, alors $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot 0 = 0$ et donc $f \cdot g \in J(x)$; $J(x)$ est donc un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$.
Comme $J(x)$ est fermé dans l'espace normé complet $C^0(K; \mathbb{R})$, $J(x)$ est complet.
Que $J(x)$ est fermé résulte du fait que si $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $J(x)$, convergente vers f dans $C^0(K; \mathbb{R})$, alors $f \in J(x)$ i.e. : $f(x) = 0$ puisque la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur K vers f , et en particulier simplement sur K .
 - b) Puisque $f_0 \in C^0(K; \mathbb{R}) \setminus J(x)$, $f_0(x) \neq 0$.
Posons $\lambda = h(x) / f_0(x)$. Alors on définit la fonction f par : $f := h - \lambda f_0$ et $f \in J(x)$ puisque $f(x) = 0$.
Soit alors I un idéal de $C^0(K; \mathbb{R})$ avec $J(x) \subset I$ et $J(x) \neq I$. Choissant $f_0 \in I \setminus J(x)$, on obtient que $h = f + \lambda f_0 \in I$ puisque I est un idéal (f et $\lambda f_0 \in I$ donc aussi $f + \lambda f_0$). Ainsi, $C^0(K; \mathbb{R}) \subset I$ d'où l'égalité. Ce qui prouve que $J(x)$ est maximal.
- 3) a) $\bigcap_{f \in I}^{-1}(\{0\}) = \{x \in K; f(x) = 0\}$ est l'ensemble des zéros de f .
Si donc $\bigcap_{f \in I}^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, f ne s'annule pas sur K et la fonction $g = \frac{1}{f}$ est parfaitement définie et continue sur K .
Comme $g \cdot f = \mathbf{1}$ et $f \in I$, on en déduit que $\mathbf{1} \in I$ et donc que $I = C^0(K; \mathbb{R})$ d'après la question 1.
 - b) I étant un idéal, donc un sous-anneau, $f = \sum_{i=1}^n f_i^2 \in I$.
D'après la question 3a, $\bigcap_{f \in I}^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, il existe donc $x \in K$ tel que $f(x) = 0$.

Or $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x) = 0$, somme de n nombres réels ≥ 0 , cette égalité équivaut à : pour tout

$i = 1, \dots, n$, $f_i(x) = 0$. On a donc : $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

c) Si $f \in I$, $f \in C^0(K; \mathbb{R})$ et donc $f^{-1}(\{0\})$ est un fermé du compact K comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f : K \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme pour toute famille finie $f_1, \dots, f_n$ d'éléments de I , $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, il résulte de la propriété de Borel-Lebesgue (pour les fermés) pour le compact K , que $\bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.

Ainsi, si $x \in \bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\})$, on a bien : pour tout $f \in I$, $f(x) = 0$, i.e. : $I \subset J(x)$.

4) L'application $\phi : x \mapsto J(x) : K \rightarrow \mathcal{M}$ du compact K dans l'ensemble $\mathcal{M}$ des idéaux maximaux de $C^0(K; \mathbb{R})$ est bien définie d'après les questions précédentes.

ϕ est surjective d'après la question 3 (si I est un idéal maximal et vérifie $I \subset J(x)$, nécessairement $I = J(x)$ puisque $J(x) \neq C^0(K; \mathbb{R})$), et ϕ est injective car si $x \neq y$, il existe $h \in C^0(K; \mathbb{R})$ telle que $h(x) \neq h(y)$ (lorsque K est métrisable, prendre la fonction $z \mapsto d(z, x)$).