

Numéro d'anonymat : QUELQUES INDICATIONS

D02. Suites et séries de fonctions
Examen final

Mardi, 9 mai 2006

Les notes et les calculatrices sont interdites. Durée de l'épreuve : 2 heures.
La rédaction doit se faire sur cette feuille; vous pouvez continuer sur la copie
le cas échéant.

Le barème est donné à titre purement indicatif.

1. [2 pt] (Rappel d'une définition.)

(a) Soit (u_n) une suite réelle. Quand est-elle dite de Cauchy?

$$[(u_n) \text{ de Cauchy}] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 : \forall n \geq N \text{ et } \forall p \geq 0 \Rightarrow |u_n - u_{n+p}| \leq \varepsilon]$$

(b) Formuler le critère de Cauchy de convergence uniforme de la série $\sum f_n$, où $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$[\sum f_n \text{ conv. uniformément sur } [a, b]] \Leftrightarrow$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 : \forall x \in [a, b], \forall n \geq N, \forall p \geq 0 \Rightarrow |f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon]$$

2. [4pt] On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ existe. Sachant que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est R avec $0 < R < +\infty$, quel est celui de

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1/L$

(a) $\sum \frac{a_n z^n}{n^n}$? $L' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{|a_n|} \right) = 0 \Rightarrow R' = +\infty$

(b) $\sum \frac{a_n z^n}{b^n}$, avec $b \in \mathbb{R}_+^*$? $L' = \frac{1}{b} L \Rightarrow R' = bR$

(c) $\sum \frac{a_n z^n}{n}$?

$$L' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n}} = L \Rightarrow R' = R$$

(d) $\sum a_n^2 z^n$?

$$L' = \lim \sqrt[n]{|a_n|^2} = L^2 \Rightarrow R' = R^2$$

3. [4pt] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que le rayon de convergence de la série est $R = 1$ et nous notons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pour $|z| < 1$. On suppose en outre que la série numérique $\sum a_n$ converge.

(a) Est-il vrai que $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$? Réponse par oui ou par non, sans justification.

NON !

(b) Si non, préciser les conditions supplémentaires sous lesquelles une telle inversion de limites est possible. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $|z_0| = 1$.

On note $A_\alpha(z_0)$ le domaine angulaire de sommet z_0 , de bissectrice Oz_0 et d'ouverture 2α avec $0 < 2\alpha < \pi$ et D_1 le disque $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. La fn f est bien définie sur $D_1 \cup \{1\}$. on a : $\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D_1 \cap A_\alpha(\frac{1}{2})}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. [4 pt] Étudier si la série $\sum f_n$ converge normalement, uniformément, simplement dans le cas où le terme général prend une des formes suivantes :

(a) $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{1+n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2+1}$ et la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$ converge.

Donc $\sum f_n$ conv. normalement $\Rightarrow$ uniformément $\Rightarrow$ simplement

(b) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{|x|+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

i) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum f_n$ ne conv. pas norm

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{|x|+n}\right)$ est une suite à termes ≥ 0 décroissante $\Rightarrow$

$\sum \frac{(-1)^n}{|x|+n}$ converge $\Rightarrow \sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n, p \geq 0 : |f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x)| = \left| \frac{1}{|x|+n} - \frac{1}{|x|+n+1} + \dots + \frac{(-1)^p}{|x|+n+p} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
et $\lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0 \Rightarrow \sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

5. [4pt] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(a) Déterminer les ensembles de x pour lesquels la série $\sum f_n$ converge simplement, absolument, uniformément.

i) $\forall x > 0$, la suite à termes positifs $\frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\sum (-1)^n$ ne converge

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum f_n$ converge simplement.

ii) $|f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$ et $\forall x > 1$ la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) tandis que pour $x \leq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ diverge

$\Rightarrow \forall x \in]1, +\infty[$, $\sum f_n$ converge absolument.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n, p \geq 0$ on a: $|f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x)| = \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \dots - \frac{1}{(n+p)^2} \right|$

Par ailleurs $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2 - 1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^{1+x}} (1 + \varepsilon(\frac{1}{n}))$.

$\Rightarrow \forall a > 0$, $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{k^{1+a}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1+a}} = 0$

(b) Montrer que la somme de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. $\Rightarrow \forall a > 0, \forall x \in [a, +\infty[$, $\sum f_n$ converge uniformément

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. En choisissant

$a = x_0/2 > 0$, on sait que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$

et comme $x \mapsto \frac{1}{n^2}$ est continue sur $]0, \infty[$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est continue en

6. [5 pt] Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a, a[$ on ait $f^{(n)}(x) \geq 0$.

(a) Écrire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral, à savoir $f(x) =$

$s_n(x) + R_n(x)$ avec $s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$ pour établir que pour tout $x \in [0, a[$, la suite $(s_n(x))$ est croissante et majorée.

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a[\Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq 0 \Rightarrow s_n(x)$ est croissante

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a[\Rightarrow R_n(x) \geq 0$ car son intégrand l'est

Finalement, $f(x) \geq 0 \forall x \in [0, a[$ car $f(0) \geq 0$ et $f^{(1)}(t) \geq 0 \Rightarrow f$ croissante sur $[0, a[$. $\Rightarrow 0 \leq s_n(x) \leq f(x)$

(b) Pour $0 < x < y < a$, établir l'inégalité $\frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_{n+1}(y)}{y^{n+1}}$.

$$\frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n f^{(n+1)}(t) \frac{dt}{x} \stackrel{t/x = \theta}{=} \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) d\theta$$

Comme $f^{(n+1)}(t) \geq 0 \forall t \in [0, a[\Rightarrow f^{(n+1)}(\theta y) \geq f^{(n+1)}(\theta x)$

car $f^{(n+1)}$ est croissante sur $[0, a[$.

$$\Rightarrow \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_{n+1}(y)}{y^{n+1}}$$

(c) En conclure que pour tout $x \in [0, a[$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

$$(b) \Rightarrow 0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y) \quad \left| \Rightarrow 0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(x) \text{ et } \frac{x}{y} < 1 \right.$$

$$(a) \Rightarrow 0 \leq R_n(y) \leq f(y)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

(d) Montrer que pour $x \in]-a, a[$ on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

$$c) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{si } x \in]0, a[.$$

$$\text{Pour } x \in]-a, 0[, \text{ on a : } |R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(0)$$

$$\text{or } \sum \frac{|x|^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(0) \text{ converge (car } |x| \in]0, a[)$$

$$\Rightarrow \text{le terme général } \frac{|x|^{n+1} f^{(n+1)}(0)}{n!} \rightarrow 0 \quad //$$

Fin de l'épreuve