

Licence de Mathématiques C04
Corrigé de l'examen du 9 mai 2006

Exercice 1. 1)

$X \setminus Y$	-1	0	1	$\mathbb{P}_X$
0	1/4	1/4	1/4	3/4
1	1/12	1/12	1/12	1/4
$\mathbb{P}_Y$	1/3	1/3	1/3	

2) a) et b) On obtient le tableau suivant :

$U \setminus V$	-1	0	1	$\mathbb{P}_U$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/12	1/4	0	1/3
1	0	1/3	0	1/3
2	0	0	1/12	1/12
$\mathbb{P}_V$	1/12	10/12	1/12	

Pour $\varepsilon = \pm 1$, nous avons $\{V = \varepsilon\} = \{(X, Y) = (1, \varepsilon)\}$; d'où

$$\mathbb{P}[\{(U, V) = (k, 1)\}] = \begin{cases} 1/12 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \mathbb{P}[\{(U, V) = (k, -1)\}] = \begin{cases} 1/12 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons aussi $\{(U, V) = (1, 0)\} = \{(X, Y) = (0, 1)\} \cup \{(X, Y) = (1, 0)\}$ et par suite $\mathbb{P}[\{(U, V) = (1, 0)\}] = \mathbb{P}[\{(X, Y) = (0, 1)\}] + \mathbb{P}[\{(X, Y) = (1, 0)\}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \dots$

Les v.a.r. U et V ne sont pas indépendantes car:

$$0 = \mathbb{P}[\{(U, V) = (-1, -1)\}] \neq \mathbb{P}[\{U = -1\}] \times \mathbb{P}[\{V = -1\}] = 1/4 \times 1/12.$$

2) c) Nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}[Y] = 0, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{4} \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \text{ et } \text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] = \frac{2}{3}.$$

D'où, en tenant compte de l'indépendance des v.a.r. X et Y ,

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1/4, \quad \mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y] = 0,$$

$$\text{Var}(U) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{41}{48}, \quad \text{Var}(V) = \mathbb{E}[V^2] = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{6},$$

$$\text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[X^2 Y + X Y^2] = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{6}.$$

Ce qui nous donne :

$$\rho(U, V) = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sigma(U) \sigma(V)} = \sqrt{\frac{8}{41}} \simeq 0,44.$$

Exercice 2. La fonction h_α est continue et à valeurs positives. Nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = \int_{-1}^1 \alpha(1-x^2) dx = 2\alpha \int_0^1 (1-x^2) dx = 2\alpha \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \alpha.$$

On en déduit que la fonction h_α est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = \frac{3}{4}$.

2) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ \frac{3}{4} \int_{-1}^t (1-x^2) dx = \frac{1}{2} + \frac{3t}{4} - \frac{t^3}{4} & \text{si } -1 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

2) b) Nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x h_\alpha(x) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 x(1-x^2) dx = 0;$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h_\alpha(x) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2(1-x^2) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5};$$

et
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{5}.$$

Exercice 3. 1) La v.a.r. $Y = \frac{X-10}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et l'on a, en désignant par F_Y sa fonction de répartition,

$$0,84 = \mathbb{P}\{8 \leq X \leq 12\} = \mathbb{P}\left\{\frac{-2}{\sigma} \leq Y \leq \frac{2}{\sigma}\right\} = 2F_Y\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1.$$

D'où $F_Y\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0,92$ et la table nous donne $\frac{2}{\sigma} \simeq 1,405$; c'est-à-dire $\sigma \simeq 1,42$.

$$2) \mathbb{P}[\{X \leq 10\}] = \mathbb{P}[\{Y \leq 0\}] = 1/2$$

$$\text{et } \mathbb{P}[\{9 \leq X \leq 11\}] = \mathbb{P}[\{|Y| \leq 0,7\}] = 2F_Y(0,7) - 1 = 2 \times 0,7580 - 1 \simeq 0,52.$$

3) Nous avons :

$$\mathbb{P}[\{10 - x \leq X \leq 10 + x\}] = \mathbb{P}[\{|Y| \leq \frac{x}{\sigma}\}] \simeq 2F_Y(\frac{x}{1,4}) - 1.$$

D'où $F_Y(\frac{x}{1,4}) = 0,975$ et la table nous donne $\frac{x}{1,42} \simeq 1,96$; c'est-à-dire $x \simeq 2,78$.

Problème. I. 1) a) Pour tout entier $n \geq 1$, la v.a.r. X_n suit la loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[U_k] = n \mathbb{E}[U_1] = np \\ \text{et } \text{Var}(X_n) &= \sum_{k=1}^n \text{Var}(U_n) = n \text{Var}(U_1) = np(1-p). \end{aligned}$$

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\forall t > 0, \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_{200} - \mathbb{E}[X_{200}]}{\sigma(X_{200})}\right| \geq t\right] \leq \frac{1}{t^2} ;$$

c'est-à-dire

$$\forall t > 0, \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_{200} - 50}{\sqrt{\frac{75}{2}}}\right| \geq t\right] \leq \frac{1}{t^2}$$

et en particulier, pour $t = \frac{10}{\sqrt{\frac{75}{2}}} = \sqrt{\frac{200}{75}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$,

$$\mathbb{P}[\{|X_{200} - 50| \geq 10\}] \leq \frac{3}{8} = 0,375.$$

D'où

$$\mathbb{P}[\{40 < X_{200} < 60\}] = \mathbb{P}[\{|X_{200} - 50| < 10\}] = 1 - \mathbb{P}[\{|X_{200} - 50| \geq 10\}] \geq 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

2) Le théorème de la limite centrée nous dit que, pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{X_{200} - 50}{\sqrt{\frac{75}{2}}}\right| \leq t\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2F(t) - 1,$$

où F désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. D'où, pour $t = \sqrt{\frac{8}{3}}$,

$$\mathbb{P}[\{40 < X_{200} < 60\}] \simeq 2F(\sqrt{\frac{8}{3}}) - 1 \simeq 2 \times 0,9484 - 1 = 0,8968.$$

II. 1) a) Pour tout $n \geq 1$, la v.a.r. Y_n prend les valeurs 0 et 1. De plus $\{Y_n = 1\} = \{U_n = 1\} \cap \{U_{n+1} = 1\}$; ce qui nous donne, en tenant compte de l'indépendance des v.a.r. U_n et U_{n+1} ,

$$\mathbb{P}[\{Y_n = 1\}] = \mathbb{P}[\{U_n = 1\}] \times \mathbb{P}[\{U_{n+1} = 1\}] = p^2.$$

Pour tout $n \geq 1$, la v.a.r. Y_n suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p^2 .

b) – Pour $j > i + 1$ les couples de v.a.r. (U_i, U_{i+1}) et (U_j, U_{j+1}) sont indépendants et par suite les v.a.r. Y_i et Y_j sont indépendantes. Nous savons alors que $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

– Pour $j = i + 1$, nous avons :

$$\mathbb{E}[Y_i Y_j] = \mathbb{E}[U_i U_{i+1}^2 U_{i+2}] = \mathbb{E}[U_i] \mathbb{E}[U_{i+1}^2] \mathbb{E}[U_{i+2}] = \mathbb{E}[U_i] \mathbb{E}[U_{i+1}] \mathbb{E}[U_{i+2}] = p^3$$

et par suite $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p) \neq 0$. Ce qui montre que les v.a.r. Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

2) a) $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Y_k] = n \mathbb{E}[Y_1] = n p^2$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_n) &= \sum_{k=1}^n \text{Var}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j) = n \text{Var}(Y_1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) \\ &= n p^2(1 - p^2) + 2(n - 1) p^3(1 - p) = p^2(1 - p)(3 + p)n - 2p^3(1 - p) \\ &\leq p^2(1 - p)(3 + p)n. \end{aligned}$$

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\forall t > 0, \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma(S_n)}\right| \geq t\right] \leq \frac{1}{t^2};$$

c'est-à-dire

$$\forall t > 0, \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n - n p^2}{n}\right| \geq \frac{\sigma(S_n)}{n} t\right] \leq \frac{1}{t^2}$$

D'où, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons :

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{p^2(1 - p)(3 + p)}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui montre la convergence en probabilité de la suite de v.a.r. $(\frac{S_n}{n})_{n \geq 1}$ vers p^2