

Corrigé de l'examen de mai 2006

**Exercice 1.**

1) Puisque  $g'(x) = 1 - \sin(\frac{x}{2})$  on a  $g'(\pi) = 0$  et la méthode converge localement. De plus,  $g''(x) = -\frac{1}{2} \cos(\frac{x}{2})$  et  $g^{(3)}(x) = \frac{1}{4} \sin(\frac{x}{2})$  donc  $g''(\pi) = 0$  et  $g^{(3)}(\pi) = \frac{1}{4} \neq 0$ . Ainsi l'ordre de la convergence locale est 3.

2) Puisque  $|g'(-\pi)| = 2 > 1$  il n'y a pas convergence locale pour  $r_2 = -\pi$ .

3) Par définition de la méthode de Newton, on a, pour  $f'(x) \neq 0$  :

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + \frac{2 \cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

4) Les racines de  $f$  sont :  $x_n = (2n+1)\pi$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $h'(x) = 1 - \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})}$  et  $h''(x) = \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin^3(\frac{x}{2})}$ , on a  $h'(x_n) = h''(x_n) = 0$  et l'ordre de convergence de la méthode est supérieur ou égal à 3 pour toutes les racines (contrairement à la méthode précédente). En calculant  $h^{(3)}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin^2(\frac{x}{2}) + 3 \cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^4(\frac{x}{2})}$  et  $h^{(3)}(x_n) = -\frac{1}{2} \neq 0$  on peut déduire que l'ordre de convergence locale est exactement 3.

**Exercice 2.**

1) Les différences divisées :

|                       |              |                                       |                                       |                             |
|-----------------------|--------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| $x_0 = 0$             | $f(x_0) = 0$ | $f[x_0, x_1] = \frac{2}{\pi}$         | $f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{4}{\pi^2}$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$ |
| $x_1 = \frac{\pi}{2}$ | $f(x_1) = 1$ | $f[x_1, x_2] = f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ | $f[x_1, x_2, x_3] = -\frac{4}{\pi^2}$ |                             |
| $x_2 = \frac{\pi}{2}$ | $f(x_2) = 1$ | $f[x_2, x_3] = -\frac{2}{\pi}$        |                                       |                             |
| $x_3 = \pi$           | $f(x_3) = 0$ |                                       |                                       |                             |

2) On obtient  $p_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x(x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$ .

3) D'après 1), on a  $p_2 = p_3$  (ou parce que  $p_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ ).

4) L'intégrale  $I(f) = \int_0^\pi f(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$  et  $I(p_3) = \int_0^\pi p_3(x) dx = \frac{4}{\pi}[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_0^\pi = \frac{2}{3}\pi$  donc l'erreur est  $E_{p_3} = |I(f) - I(p_3)| = 2|1 - \frac{\pi}{3}| \simeq 9,4 \cdot 10^{-2}$ .

5) L'erreur de la formule d'intégration composée des trapèzes sur  $[0, \pi]$  pour la subdivision régulière satisfait donc

$$|E_{T_n}(f)| \leq \frac{M_2}{12} h^2(\pi - 0) = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

car  $M_2 = \sup_{x \in [0, \pi]} |f''(x)| = \sup_{x \in [0, \pi]} |\sin(x)| = 1$  et  $h = \frac{\pi}{n}$ . On cherche donc  $n$  tel que  $\frac{\pi^3}{12n^2} < 9,4 \cdot 10^{-2}$  et on obtient  $n \geq 6$ .

### **Exercice 3.**

1) Pour faciliter les calculs on remarque que pour  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$(x^n, 1) = \int_0^1 2x^{n+1} dx = \frac{2}{n+2}.$$

La standardisation impose que  $p_0 = 1$  et on cherche  $a_0 \in \mathbb{R}$  définissant  $p_1 = x + a_0 p_0$  tel que  $(p_1, p_0) = 0$ . On obtient  $a_0 = -\frac{2}{3}$  et  $p_1 = x - \frac{2}{3}$ .

De même, on cherche  $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$  définissant  $p_2 = x^2 + b_1 p_1 + b_0 p_0$  tels que  $(p_2, p_0) = 0$  et  $(p_2, p_1) = 0$ . On obtient  $b_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_1 = -\frac{6}{5}$  et  $p_2 = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}$ .

2) Le nœud de  $G_1$  est la racine de  $p_1 : x = \frac{2}{3}$ .

Les nœuds de  $G_2$  sont les racines de  $p_2 : x_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}$  et  $x_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$ .

3) Pour que la méthode soit d'ordre 2, il faut qu'elle soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 :  $Q_2(1) = I(1) \iff a + b = 1$ ,  $Q_2(x) = I(x) \iff bc = \frac{12}{3}$  et  $Q_2(x^2) = I(x^2) \iff bc^2 = \frac{1}{2}$ . On obtient  $a = \frac{1}{9}$ ,  $b = \frac{8}{9}$  et  $c = \frac{3}{4}$ .

4) Comme  $Q_2(x^3) = bc^3 = \frac{3}{8}$  est différent de  $I(x^3) = \frac{2}{5}$  la méthode n'est pas d'ordre 3. Autre justification : parmi les formules à 2 points, seule celle de Gauss est d'ordre 3 et  $Q_2$  (ayant 0 comme nœud) n'est pas la formule de Gauss (qui a pour nœuds  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ).