
Examen Terminal
Correction

Exercice 1.

1. f est concave sur $\mathbb{R}$ donc continue (en fait, l'énoncé donne plus : de classe C^1). D'après le théorème des valeurs intermédiaires et l'hypothèse de l'exercice on a : $[m+3, n+3] \subset f(\mathbb{R})$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ (avec $m \leq n$). On fait tendre m vers $-\infty$ et n vers $+\infty$ pour obtenir $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
2. D'après le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n, n+1]$, on a :
$$\exists x_n \in]n, n+1[; \quad f(n+1) - f(n) = 1 = f'(x_n)(n+1 - n) = f'(x_n).$$
3. f est concave et dérivable. Donc f' est décroissante. Mais d'après la question précédente il existe des suites $x_n \rightarrow \pm\infty$ quand $n \rightarrow \pm\infty$ telles que $f'(x_n) = 1$, ce qui implique que $f' \equiv 1$. Puisque $f(0) = 3$, ceci implique forcément que $f(x) = x + 3$.

Exercice 2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction continue et *convexe*.

1. On pose $x = bt + (1-t)a$ (soit $dx = (b-a)dt$). On a :

$$(b-a) \int_0^1 f(bt + (1-t)a)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Puisque f est convexe, on a :

$$f(bt + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a), \quad \forall t \in [0, 1].$$

En intégrant les deux membres de cette inégalité (les deux fonctions sont continues) sur $[0, 1]$ on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f(bt + (1-t)a)dt \leq \frac{1}{2} (b-a) (f(b) + f(a)).$$

D'où le résultat.

Problème

1. Cela signifie que sur tout intervalle $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.
2. Parce qu'en restriction à tout intervalle $[a, b]$ contenu dans l'un des intervalles cités ci-dessus, f est continue (donc Riemann intégrable).
3. La limite de f lorsque $x \in I$ tend vers -1 vaut 0. Par conséquent, la fonction f se prolonge par continuité en -1 . Ainsi (Proposition du paragraphe 1 du chapitre "Intégrales généralisées" du cours), l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{-1/2} f(x) dx$ est convergente.
4. On obtient (il faut distinguer ci-dessous ce qui se passe à gauche et à droite de 0) :

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \frac{x}{|x|^{3/2}} \sim \operatorname{sgn}(x) \frac{1}{2\sqrt{|x|}}, \quad |f(x)| \sim \frac{1}{2\sqrt{|x|}}.$$

5. Il suffit de prouver que f est intégrable (ou absolument convergente) sur $[-1/2, 0]$ et sur $[0, 2]$ pour pouvoir conclure (via le Corollaire du paragraphe 6 du chapitre "Intégrales généralisées") que les intégrales généralisées $\int_{-1/2}^0 f(x) dx$ et $\int_0^2 f(x) dx$ sont convergentes.

On raisonne donc avec la fonction $|f(x)|$. Puisque $\alpha \geq -1$, la fonction $g(x) = 1/(2\sqrt{|x|})$ est intégrable sur $[-1/2, 0]$ et sur $[0, 2]$ (voir l'Exemple 2 du paragraphe 2 du chapitre "Intégrales généralisées"). En appliquant le Corollaire 3 (critère sur les équivalents) du paragraphe 5 du chapitre "Intégrales généralisées" on en déduit que les intégrales généralisées $\int_{-1/2}^0 f(x) dx$ et $\int_0^2 f(x) dx$ sont convergentes.

6. Cette inégalité vient de ce que :

$$x \leq 2 + x, \quad \ln x \leq \ln(1 + x), \quad |\sin x| \leq 1, \quad \forall x \in [2, +\infty[.$$

7. Le changement de variables $x = e^y$ conduit à :

$$\int_2^{+\infty} x^{-1} (\ln x)^{-3/2} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} y^{-3/2} dy = 2 / \sqrt{\ln 2}.$$

8. D'après 5), la fonction $g(x) = x^{-1} (\ln x)^{-3/2}$ majore $|f(x)|$ sur $[2, +\infty[$. D'après 6), la fonction $g(x)$ est intégrable sur $[2, +\infty[$. Ainsi, en appliquant le Corollaire 1 du paragraphe 5 du chapitre "Intégrales généralisées", l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} |f(x)| dx$ est convergente ce qui signifie que f est absolument convergente sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

9. D'après 7) et le Corollaire du paragraphe 6 du chapitre "Intégrales généralisées", l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

10. Il s'agit ici d'appliquer le théorème 2 (continuité) du paragraphe 2 du chapitre "Intégrales dépendant d'un paramètre". La difficulté consiste à en vérifier les hypothèses. D'une part la fonction $\tilde{f}(t, x)$ est clairement continue (comme fonction de deux variables) sur le rectangle $\mathbb{R} \times [2, +\infty[$. D'autre part, on dispose encore de la majoration :

$$|\tilde{f}(t, x)| \leq g(x) = x^{-1} (\ln x)^{-3/2}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [2, +\infty[$$

avec d'après 6), g intégrable sur $[2, +\infty[$. Alors le point (ii) du résultat cité donne la réponse.

11. Il s'agit ici d'appliquer le théorème 2 (dérivabilité) du paragraphe 3 du chapitre "Intégrales dépendant d'un paramètre". La difficulté consiste à en vérifier les hypothèses. On a déjà vu la continuité de $\tilde{f}$ en 9). De plus, pour tout $x \in [2, +\infty[$, l'application $t \mapsto \tilde{f}(t, x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, x) = x (2 + x)^{-2} |\ln(1 + x)|^{-3/2} \cos(tx).$$

De toute évidence :

$$|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, x)| \leq g(x) = x^{-1} (\ln x)^{-3/2}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [2, +\infty[$$

avec d'après 6), g intégrable sur $[2, +\infty[$. Alors le point (ii) du résultat cité donne la réponse.