

Exercice I (3 points)

- a) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 3z = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$;
 en effet, $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = -\frac{3}{2}z\} = \{(-\frac{3}{2}z, y, z, t), y, z, t \in \mathbb{R}\}$ et par suite,
 $E = \{z(-\frac{3}{2}, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1), y, z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\{(-\frac{3}{2}, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\})$
- b) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ car cet ensemble ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0, 0) : 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \neq 1$.
- c) $\text{Vect}(u_1, u_2) + \text{Vect}(u_3, u_4)$ est un s.e.v. par définition de la somme de deux s.e.v. : c'est le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.
- d) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 3y - z + 2t = -1\}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ car cet ensemble ne contient pas le vecteur nul $(0, 0, 0, 0) : 2 \times 0 + 3 \times 0 - 0 + 2 \times 0 \neq -1$.

Exercice II (3 points)

- 1) Le système (L) admet pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 & a+2 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a(a^2-1) \end{pmatrix}$. A est échelonnée et le calcul de son rang est donc clair :

- Si $a = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et le système est de rang 1.
- Si $a^2 - 1 = 0$ (et donc $a \neq 0$) alors $A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 & a+2 \\ 0 & a \neq 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et le système est de rang 2.
- Si $a^2 - 1 \neq 0$ et $a \neq 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 & a+2 \\ 0 & a \neq 0 & a \\ 0 & 0 & a(a^2-1) \neq 0 \end{pmatrix}$ et le système est de rang 3.

Le système est donc de rang strictement inférieur à trois si et seulement si $a \in \{0, 1, -1\}$.

2)

- Si $a = 0$ alors L s'écrit

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il admet donc comme ensemble de solutions le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 3y + 2z = 1$ ce qui peut encore s'écrire $S(L) = (1, 0, 0) + \text{Vect}((3, 1, 0), (-2, 0, 1))$.

- Si $a = -1$ alors L s'écrit

$$\begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ -y - z = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Il n'admet donc pas de solutions : $S(L) = \emptyset$.

- Si $a = 1$ alors L s'écrit

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ y + z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad (L) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - z \\ x = 2 + 2y - 3z \\ = 10 - 5z \end{cases}$$

(L) admet donc comme ensemble de solutions la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(10, 4, 0)$ et dirigée par $\vec{u}(-5, -1, 1)$, autrement dit, $S(L) = (10, 4, 0) + \text{Vect}((-5, -1, 1))$.

Exercice III (4 points)

- 1) a) f n'est pas linéaire car $f(0_E) = 1 \neq 0_E$.
- b) f est linéaire. En effet, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(P + \lambda Q) = (X - 1)(P' + \lambda Q')$ (linéarité de la dérivation) et donc $f(P + \lambda Q) = (X - 1)P' + \lambda(X - 1)Q' = f(P) + \lambda f(Q)$.
- c) f n'est pas linéaire car $f(2X) = 4X^2 \neq 2f(X)$.
- 2) On vient de voir (question 1b)) que f est linéaire et on a $f(1) = 0$, $f(X) = X - 1 = -1 + X$, $f(X^2) = (X - 1)(2X) = -2X + 2X^2$ et $f(X^3) = (X - 1)(3X^2) = -3X^2 + 3X^3$.

Par suite, la matrice de f cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- 3) La matrice de f montre que f est de rang 3 donc que $\dim(\text{Im } f) = 3$. On en déduit $\dim(\text{Ker } f) = 1$ (théorème du rang en dimension 4) et par suite, puisque $f(1) = 0$, $\text{Ker } f = \text{Vect}(\{1\})$.
- D'autre part, $\text{Im } f = \{f(P), P \in E\} = \{(X - 1)(b + 2cX + 3dX^2), b, c, d \in \mathbb{R}\}$ donc finalement $\text{Im } f = \text{Vect}(\{X - 1, X(X - 1), X^2(X - 1)\})$.

Exercice IV (10 points)

- 1) La matrice des coordonnées de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ dans la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Cette matrice a même

rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. P est donc de rang 3 et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille

libre (son rang est égal à son cardinal) maximale de $\mathbb{R}^3$: c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- 2) On résout le système $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \varepsilon_2 = 2e_1 + 5e_2 + 5e_3 \\ \varepsilon_3 = 2e_1 + 3e_2 - 2e_3 \end{cases}$ en les inconnues e_1, e_2, e_3 : $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 = e_2 + 3e_3 \\ \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1 = -e_2 - 4e_3 \end{cases}$
- $\begin{cases} -e_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 \\ e_2 = \varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 - 3e_3 \\ e_1 = \varepsilon_1 - 2e_2 - e_3 \end{cases}$ soit finalement $\begin{cases} e_3 = 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ e_2 = -14\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ e_1 = 25\varepsilon_1 - 7\varepsilon_2 - 5\varepsilon_3 \end{cases}$

3) P^{-1} est la matrice des coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans la base $\mathcal{C}$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -14 & 4 \\ -7 & 4 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

On pouvait aussi bien sûr résoudre le système $Y = PX$ d'inconnue X et en déduire P^{-1} .

4) Une application linéaire est, en dimension finie, caractérisée par les images des vecteurs d'une base : il existe une unique application linéaire envoyant e_1, e_2, e_3 sur des vecteurs donnés (propriété universelle).

5) On a $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -20 & 11 & -2 \\ -45 & 26 & -7 \end{pmatrix}$.

6) On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(\varepsilon_1) = (0, 0, 0) = 0_E$. De même, on obtenait $f(\varepsilon_2) = (2, 5, 5) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = (-2, -3, 2) = -\varepsilon_3$. Il fallait prendre garde à bien exprimer ces images dans la base $\mathcal{C}$. Cela permettait de déduire de manière immédiate $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7) D est de rang 2 donc $\dim(\text{Im } f) = 2$ et par suite (théorème du rang) $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im } f) = 3 - 2 = 1$. Or, $0 \neq \varepsilon_1 \in \text{Ker } f$ donc $\text{Ker } f$ est la droite vectorielle engendrée par ε_1 . D'autre part, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_2)$ et $\varepsilon_3 = f(-\varepsilon_3)$ sont dans $\text{Im } f$ et sont linéairement indépendants donc $\text{Im } f$ est le plan vectoriel de base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

8) On a reconnu P comme la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. L'égalité proposée n'est autre que la formule de changement de base pour un endomorphisme.

Bien sûr, on peut aussi calculer $AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP$ ou encore $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP$.