

Exercice 1 Le but de cet exercice est de démontrer que $\mathbf{N}^2$ est dénombrable en construisant un dénombrement explicite.

Soit $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une application satisfaisant

$$(*) \quad f(0) = 0 \text{ et } \forall s \in \mathbf{N}, \quad f(s) < f(s+1).$$

1. Montrer que f est strictement croissante, c'est à dire que

$$\forall s, s' \in \mathbf{N}, \quad s < s' \Rightarrow f(s) < f(s').$$

On pourra faire une récurrence sur la différence $d := s' - s$.

Solution Pour $d = 1$, on a $s' = s + 1$, et l'énoncé est équivalent à l'hypothèse $f(s) < f(s+1)$. Supposons maintenant que l'implication

$$s < s' \Rightarrow f(s) < f(s')$$

est vraie dans tous les cas particuliers où $s' - s \leq d$, et supposons que s' et s sont des entiers tels que $s' - s = d + 1$. Alors $(s' - 1) - s = d$, et on obtient $f(s) < f(s' - 1)$. En plus, l'inégalité $(*)$ implique immédiatement que $f(s' - 1) < f(s')$. Par transitivité de la relation $<$, on a donc $f(s) < f(s')$.

2. Montrer que la famille de sous-ensembles

$$I_s = \{f(s), f(s) + 1, f(s) + 2, \dots, f(s+1) - 1\} \quad (s \in \mathbf{N})$$

est une partition de $\mathbf{N}$.

Solution On démontre deux choses : d'abord, pour $s \neq s'$, on a $I_s \cap I_{s'} = \emptyset$. En effet, si $s < s'$, alors $s + 1 \leq s'$, et on a par (1) que $f(s+1) \leq f(s')$. En conséquence, tous les nombres entre $f(s)$ et $f(s+1) - 1$ sont plus petits que $f(s')$, et donc tout éléments de I_s est plus petit que n'importe quel élément de $I_{s'}$. Deuxièmement, nous affirons que, étant donné un entier k , il existe un entier s tel que $k \in I_s$. En effet, nous observons que pour tout $s \in \mathbf{N}$ on a $f(s) \geq s$ (ce qui se démontre par récurrence, par exemple). En particulier, pour tout $s' \in \mathbf{N}$ tel que $s' > k$ on a $f(s') \geq k$. On peut donc définir

$$s := \text{le plus grand entier tel que } f(s) \leq k.$$

Alors, par construction, $k \in I_s$.

Dans le reste de cet exercice, on suppose que f est définie par récurrence par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbf{N}, f(s+1) = f(s) + s + 1.$$

Nous observons que f satisfait bien la propriété $(*)$.

3. Écrire f comme fonction numérique (rationnelle) de s .

Solution On trouve $f(n) = \sum_{k=1}^n k = n \cdot (n+1)/2$.

4. La fonction f est-elle injective, surjective, bijective ?

Solution Comme la fonction f satisfait $(*)$, elle est strictement croissante par la question 1, et donc injective. En revanche, f n'est pas surjective. En effet, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, et $f(s) \geq 3$ pour $s \geq 3$ – en particulier, l'entier 2 n'est pas dans l'image de f . A fortiori, f n'est pas bijective.

On définit la fonction $\varphi : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ par

$$\varphi(m, n) = f(m + n) + n.$$

5. Montrer que

$$\forall m, n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(m, n) \in I_{m+n}$$

Solution $f(m + n) \leq f(m + n) + n \leq f(m + n) + m + n - 1$.

6. En déduire que φ est injective.

Solution Supposons qu'il existe m, n, k, l tels que $\varphi(m, n) = \varphi(k, l)$. Alors $\varphi(m, n)$ appartient à I_{m+n} et à I_{k+l} , donc $m + n = k + l$. On déduit aussi que

$$f(m + n) + n = \varphi(m, n) = \varphi(k, l) = f(k + l) + l = f(m + n) + l$$

et en particulier $n = l$; enfin, on peut déduire aussi que $m = k$, et donc, $(m, n) = (k, l)$. Donc φ est injective.

7. En déduire aussi que φ est surjective.

Solution Pour $s \in \mathbf{N}$, il y a exactement $s + 1$ éléments de $\mathbf{N}$ qui sont envoyés sur I_s par φ , à savoir $(s, 0)$, $(s - 1, 1)$, $\dots$, $(1, s - 1)$, et $(0, s)$. Les images de ces éléments sont les $s + 1$ éléments de I_s : $f(s)$, $f(s) + 1$, $\dots$, $f(s) + s - 1$, $f(s) + s$. Donc tous les éléments de I_s sont dans l'image de φ . Comme s était choisi arbitrairement, φ est surjective.

8. Montrer que $\mathbf{N}^2$ est dénombrable. **Solution** On vient de démontrer que l'application $\varphi : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ est bijective.

Exercice 2 Dans cet exercice, on désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit C l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$. On considère la relation $\geq$ sur C définie par

$$f \geq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq g(x).$$

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.

Elle est réflexive car pour toute fonction f et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f(x) \leq f(x)$. Elle est antisymétrique car si $f \leq g$ et $g \leq f$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \leq f(x)$. Ceci implique que $f(x) = g(x)$ pour tout x , donc $f = g$. Enfin, la relation est transitive car, si $f \leq g \leq h$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \leq h(x)$, et donc $f(x) \leq h(x)$. On obtient que $f \leq h$.

2. Est-ce un ordre total ?

Solution Non. Par exemple, les fonctions $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto 1$ ne sont pas comparables dans cet ordre.

3. L'ensemble ordonné C a-t-il un plus petit élément ?

Solution Oui, la fonction $f_*: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+, x \mapsto 0$ est un plus petit élément. En effet, pour toute fonction (continue) $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ et tout $x \in \mathbf{R}_+$ on a $f_*(x) \leq g(x)$.

4. On considère le sous-ensemble A de C contenant les 3 fonctions

$$x \mapsto \exp(x), \quad x \mapsto \exp(-x), \quad \text{et} \quad x \mapsto |x| + 1$$

Y-a-t'il des éléments minimaux dans A ? Si oui, lesquels ?

Solution Oui, les fonctions $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ sont tous les deux minimaux.

5. Le sous-ensemble

$$B = \{f \in C, f(0) > 1\}$$

a-t-il une borne inférieure ? **Solution** La seule fonction *continue* h telle que pour tout $f \in B$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ on a $h(x) \leq f(x)$ est la fonction constante nulle. Donc le seul minorant de B est $f \equiv 0$, et ceci est donc la borne inférieure de B .

On considère la relation $\sim$ sur C définie par

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}, |f(x) - g(x)| \leq M.$$

6. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Solution Pour toute fonction f et pour tout x on a $|f(x) - f(x)| \leq 0$, donc la relation est réflexive avec $M = 0$. Symétrie est immédiate. Pour la transitivité supposons que f et g sont M -proches et que g et h sont M' -proches. Alors f et h sont $M + M'$ -proches.

7. Donner l'exemple de deux fonctions qui appartiennent à des classes distinctes.

Solution Par exemple, les fonctions $f(x) = 0$ et $g(x) = |x|$ - effectivement, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - g(x)| = +\infty$, donc il n'existe pas de borne M sur $|f(x) - g(x)|$.

On définit une autre relation d'équivalence $\approx$ par

$$f \approx g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}_+, |f(x) - g(x)| \leq M.$$

8. Décrire l'ensemble quotient $C/\approx$.

Solution Toutes les fonctions sont équivalentes selon cette relation, donc l'ensemble quotient n'a qu'un seul élément.

Exercice 3 Dans le groupe symétrique S_6 , on considère l'élément

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition en cycles disjoints de σ .

Solution $(1\ 5\ 3)(2\ 6)$

2. Calculer σ^{32} .

Solution Les deux cycles $(1\ 5\ 3)$ et $(2\ 6)$ sont *disjoints*, et en particulier ils commutent : $((1\ 5\ 3)(2\ 6))^k = (1\ 5\ 3)^k(2\ 6)^k$. L'ordre de σ est donc le plus petit entier k tel que $(1\ 5\ 3)^k = id$ et $(2\ 6)^k = id$ – autrement dit, l'ordre de σ est $ppcm(3, 2) = 6$. On en déduit que $\sigma^{32} = \sigma^{30} \cdot \sigma^2 = \sigma^2 = (1\ 3\ 5)$.